

# **Metody Numeryczne w inżynierii**

**Wprowadzenie do Metody  
Elementów Skończonych**

-

**opracow. na podst. literatury**

Rzwoj nowoczesnych technik informatycznych umożliwił powstanie zaawansowanych **systemów komputerowych wspomagania projektowania**. Postępujący równolegle rozwój metod numerycznych (matematyka zaawansowana), szczególnie:

➤ **MRS - Metoda Różnic Skończonych**

➤ **MES - Metoda Elementów Skończonych**

umożliwił modelowanie zjawisk w różnego typu urządzeniach zarówno w statycznych, jak i w dynamicznych stanach pracy.

**MRS** to popularna metoda numeryczna służąca do rozwiązywania równań różniczkowych. Jej główna idea polega na zastąpieniu pochodnych występujących w równaniach przez odpowiednie ilorazy różnicowe, co pozwala przekształcić skomplikowany problem ciągły w układ prostych równań algebraicznych.

**MES** to zaawansowana technika numeryczna służąca do symulacji i obliczania zachowania obiektów fizycznych pod wpływem obciążeń. Polega ona na podziale (dyskretyzacji) skomplikowanego modelu na prostsze elementy, co umożliwia rozwiązanie złożonych równań różniczkowych inżynierskich.

## Rozwiązanie problemu za pomocą metody MRS dzieli się na trzy główne etapy:

1. **Dyskretyzacja obszaru:** Pokrycie analizowanego obszaru geometryczną siatką dyskretną. Węzły to konkretne punkty, w których poszukiwane są wartości.
2. **Przybliżenie pochodnych:** Zastąpienie ciągłych pochodnych ilorazami różnicowymi opartymi na wartościach w sąsiednich węzłach (wyprowadzanymi np. z rozwinięcia funkcji w szereg Taylora).
3. **Rozwiązanie układu:** Rozwiązanie powstałego układu równań algebraicznych za pomocą komputera, co pozwala poznać wartość szukanej funkcji w każdym węźle.

### Główne zalety i wady

- **Zalety:** Bardzo intuicyjna, łatwa w programowaniu i wdrożeniu. Świetnie sprawdza się w regularnych obszarach (np. prostokąty, proste siatki).
- **Wady:** Trudności z modelowaniem skomplikowanych, nieregularnych kształtów – w takich przypadkach lepiej sprawdza się metoda elementów skończonych (MES).

### Zastosowanie

MRS jest szeroko stosowana w inżynierii i fizyce do rozwiązywania problemów polowych, takich jak:

- ✓ przepływ ciepła,
- ✓ mechanika przepływu płynów,
- ✓ drgania i wytrzymałość konstrukcji.

## Proces obliczeniowy analizy metodą MES opiera się zazwyczaj na trzech krokach:

1. **Preprocesor:** Stworzenie modelu geometrycznego, zdefiniowanie właściwości materiału, podział obiektu na tzw. siatkę elementów skończonych (dyskretyzacja) oraz ustalenie warunków brzegowych i obciążeń.
2. **Solver (Procesor główny):** Przeprowadzenie obliczeń matematycznych. Komputer rozwiązuje układ równań różniczkowych dla każdego pojedynczego elementu, a następnie łączy je w spójną całość.
3. **Postprocesor:** Graficzna prezentacja wyników (np. mapy naprężeń, przemieszczeń czy temperatur), umożliwiającą inżynierowi ocenę konstrukcji

## Zastosowanie MES

Metoda ta jest powszechnie wykorzystywana w wielu gałęziach przemysłu i nauki do symulacji:

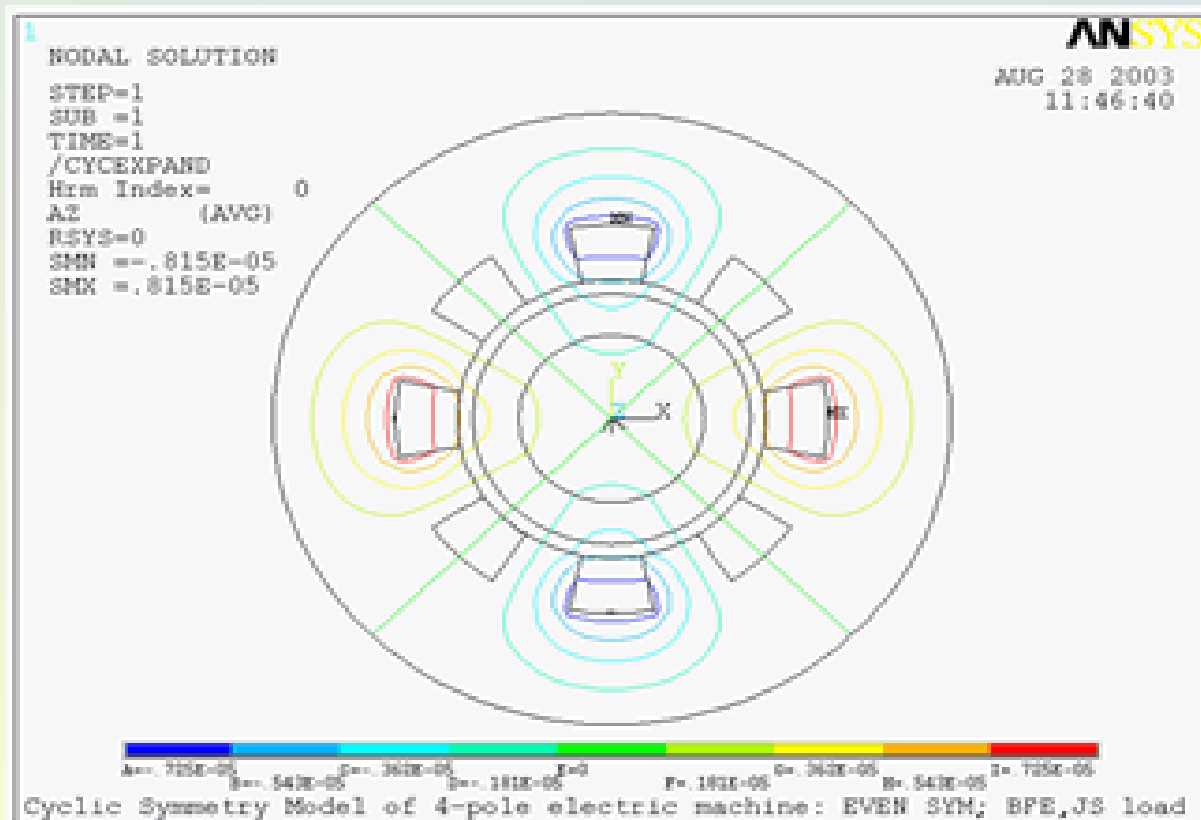
- **Mechanice i budownictwie:** Analiza wytrzymałościowa, zmęczeniowa oraz określanie odkształceń konstrukcji.
- **Termodynamice:** Badanie przewodnictwa i przepływu ciepła.
- **Przepływach płynów:** Analiza aerodynamiki i hydromechaniki.
- **Medycynie:** Modelowanie naprężeń np. w implantach czy protezach.

## Główne zalety

- ✓ Zastępuje kosztowne i czasochłonne testy fizyczne.
- ✓ Pozwala na wykrycie wad i optymalizację projektu na wczesnym etapie.
- ✓ Umożliwia wizualizację zjawisk, których zbadanie w rzeczywistości byłoby niemożliwe.

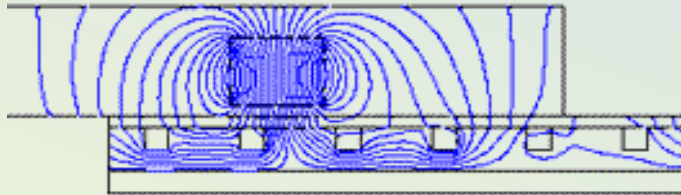
# Symulacja komputerowa pól elektromagnetycznych w przetworniku elektromechanicznym

## Model przetwornika elektromechanicznego (silnik)

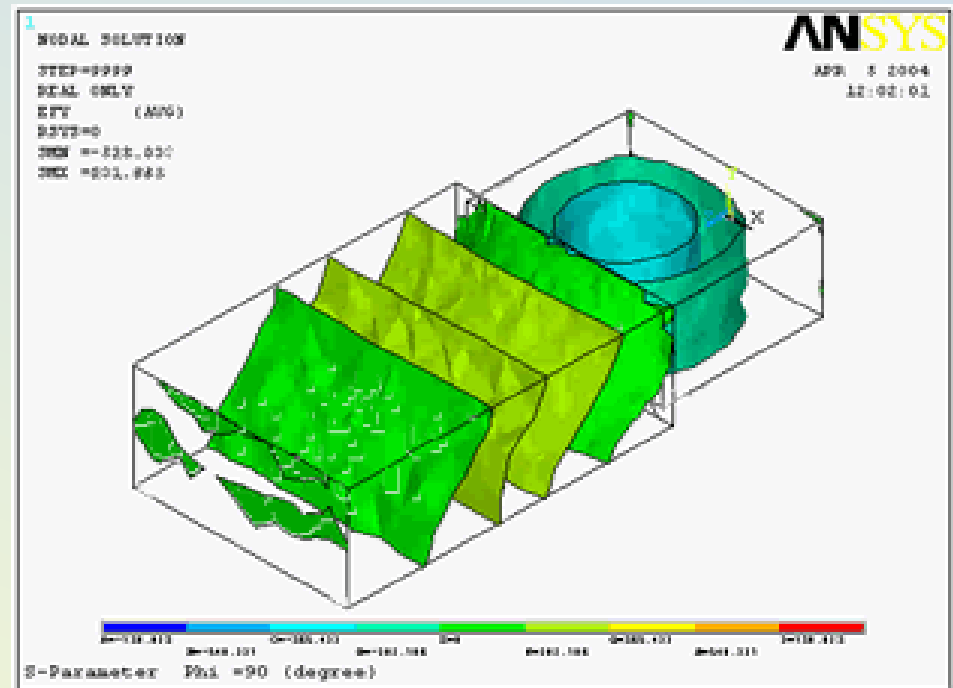


**Rozkład pola magnetycznego względem osi x,  
przekrój prostopadły 2D (rzut 1)**

# *Model przetwornika elektromechanicznego (silnik)*

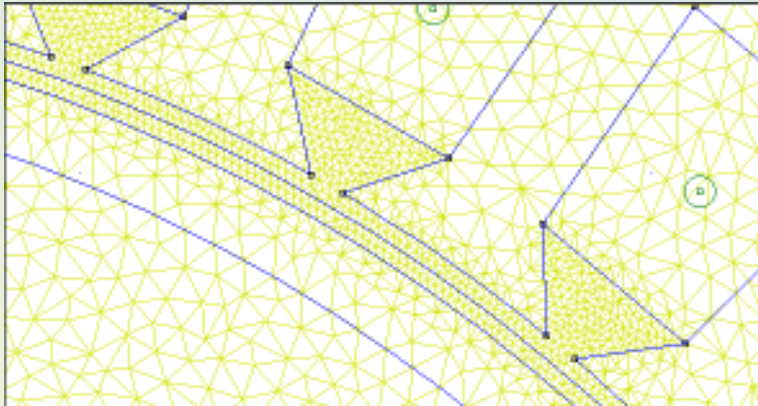


*Rozkład pola magnetycznego w przekroju poprzecznym 2D (rzut 2)*

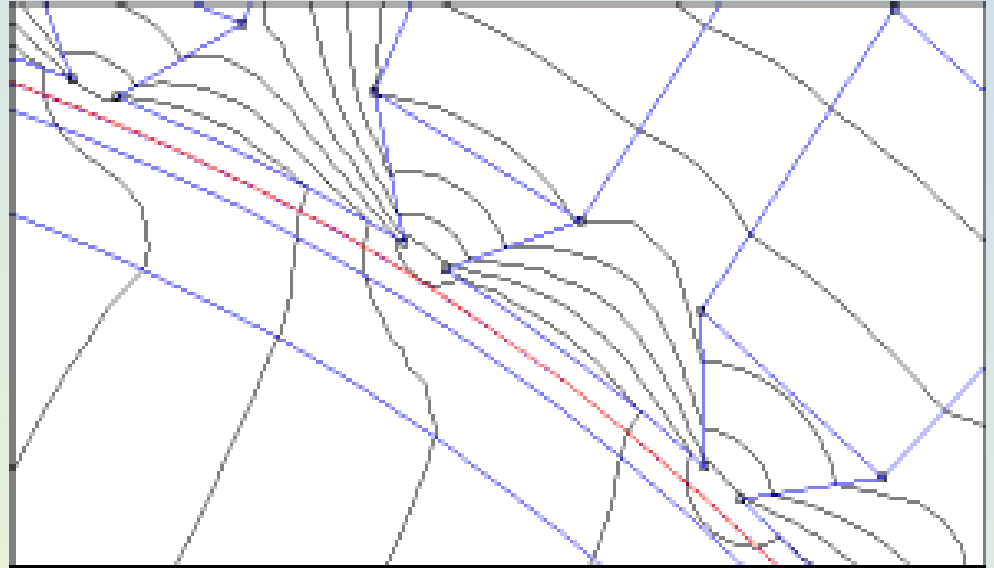


*Rozkład pola magnetycznego przekrój wzdłużny 3D (rzut 3)*

# ***Geometria obiektu (Siatka)***

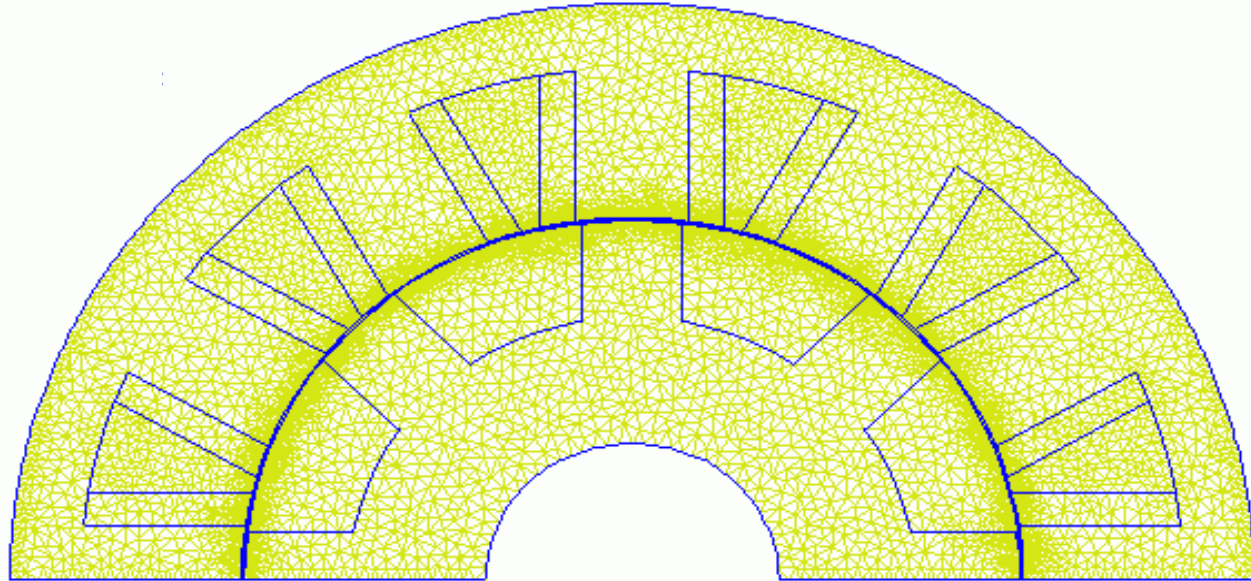


***Automatyczne generowanie siatki elementów.***



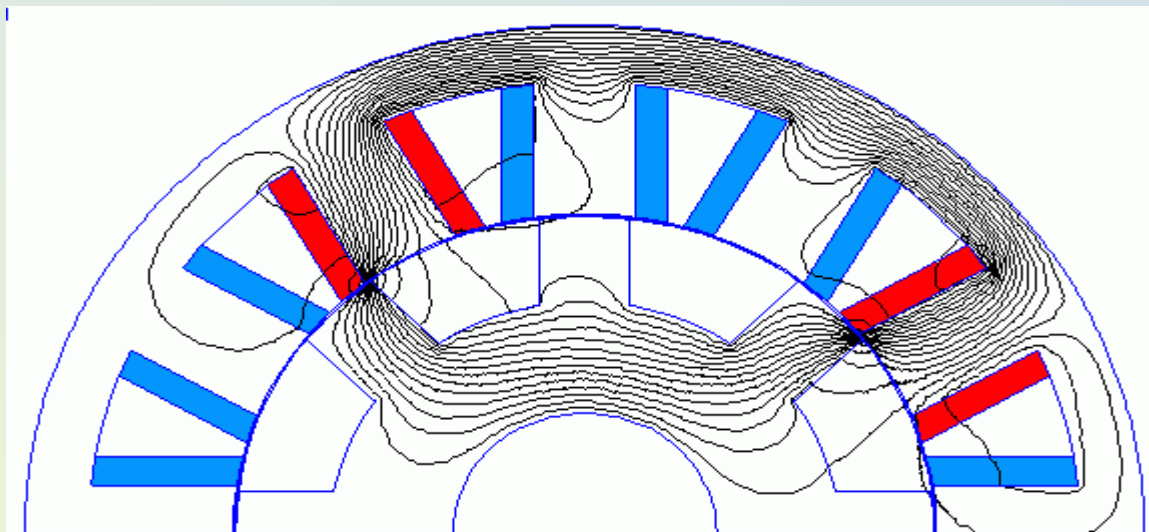
***Rozkład indukcji.***

# *Geometria obiektu (Siatka)*



*Siatka tworzona na modelu w ruchu  
przekrój prostopadły 2D*

# ***Geometria obiektu*** ***(rozkład linii sił pola magnetycznego)***



***Rozkład pola magnetycznego,  
przekrój prostopadły 2D***

# ANSYS

**ANSYS** jest wiodącym na świecie pakietem do obliczeń **MES** umożliwiającym kompleksową symulację w każdej niemal dziedzinie nauki i przemysłu. Łatwość obsługi programu i komfortowy interfejs graficzny umożliwia nawet niedoświadczonemu użytkownikowi dokonywanie pierwszych analiz po krótkim wprowadzeniu.

**ANSYS** składa się z wielu narzędzi. Umożliwia to optymalne dobieranie wymaganych opcji do własnych potrzeb. Stosowanie metody elementów skończonych (MES) przynosi już po krótkim czasie korzyści znacznie przewyższające poniesione koszty. Możliwe staje się projektowanie optymalnych pod wieloma względami konstrukcji (np. o minimalnym ciężarze, energooszczędnych itd.) drastycznie maleje liczba kosztownych prototypów, skrócony jest znacznie czas wprowadzania produktu na rynek.

# Istota metody elementów skończonych

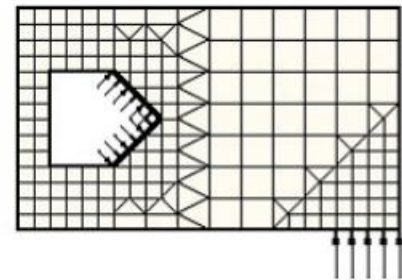
metoda służąca do przybliżonego rozwiązania zagadnień z wielu różnych dziedzin (np. problemów opisanych za pomocą równań różniczkowych z określonymi warunkami brzegowymi)

- **obiekt rzeczywisty** : obszar w przestrzeni obejmujący ośrodek ciągły, obiekt techniczny istniejący w rzeczywistości, projekt techniczny obiektu
- **model matematyczny** : stworzony do badań teoretycznych zachowania się obiektu rzeczywistego na skutek oddziaływań zewnętrznych, lub przemian wewnętrznych

# Istota metody elementów skończonych

**Model matematyczny** – zadanie mechaniki ośrodków ciągłych:

- opis powierzchni  $\mathbf{S}$  ograniczającej obszar  $\mathbf{V}$ , wewnątrz którego poszukujemy rozwiązania,
- równania różniczkowe opisujące stan równowagi ciała w obszarze  $\mathbf{V}$ ,
- warunki brzegowe na powierzchni  $\mathbf{S}$
- obciążenie ciała – pewne zewnętrzne przyczyny wywołujące skutki określone równaniem równowagi



# Istota metody elementów skończonych

Rozwiązanie zadania mechaniki metodą elementów skończonych wymaga opracowania **modelu numerycznego** (dyskretnego) równoważnego do modelu matematycznego ośrodka ciągłego

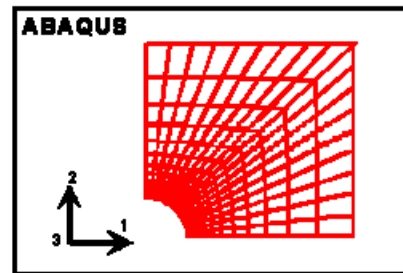
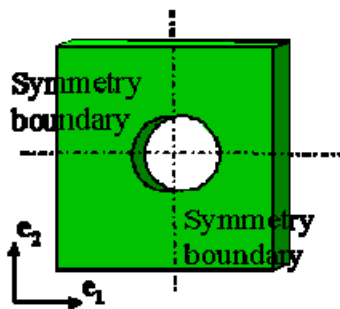
## **Metoda elementów skończonych:**

- metoda przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych
- **zamiana problemu ciągłego** (opisanego np. równaniami różniczkowymi) **na równoważny problem dyskretny** (opisany równaniami algebraicznymi)
- prosty algorytm, ogólny charakter algorytmu

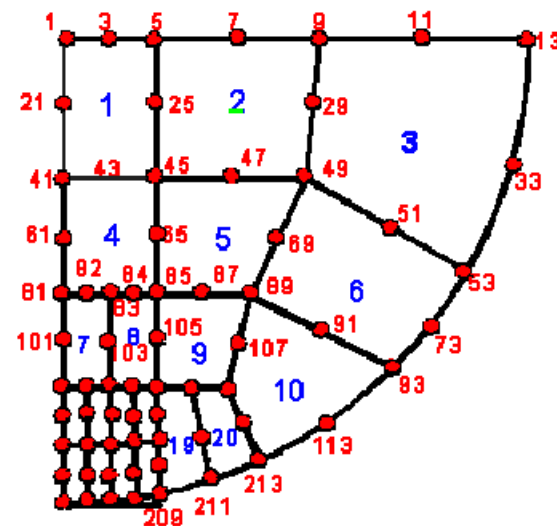
# Istota metody elementów skończonych

## Szkic algorytmu MES

- **podział** rozpatrywanego obszaru na **elementy skończone** (podobszary o prostej geometrii)



- określenie **punktów węzłowych** tak, aby można było przeprowadzić aproksymację poszukiwanych rezultatów wewnątrz obszaru elementu za pomocą funkcji aproksymujących i parametrów węzłowych



# Istota metody elementów skończonych

## Szkic algorytmu MES (cd)

- określenie **dla każdego elementu struktury macierzy opisujących jego własności**, sformowanie tzw. macierzy struktury (macierzy sztywności) dla każdego z elementów skończonych
- **utworzenie tzw. globalnej macierzy struktury** (macierzy sztywności) – dla całego układu na podstawie macierzy elementów - agregacja
- określenie **warunków brzegowych** i obciążeń
- **rozwiązanie podstawowego układu równań MES** (liniowych) – wyznaczenie wartości parametrów (wartości pewnej funkcji) w węzłach
- **obliczenie** (przy użyciu metod aproksymacyjnych) na podstawie wyznaczonych parametrów w węzłach, **wartości parametrów** (wartości pewnej funkcji) w **punktach nie będących węzłami**

# Dyskretyzacja

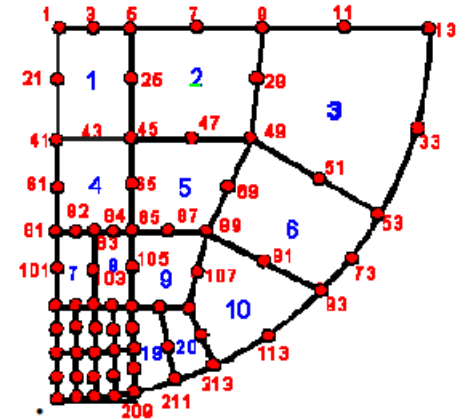
(podział obszaru na elementy skończone)

- **sposób dyskretyzacji**

(rodzaje użytych elementów, liczba elementów)

zależy od

- geometrii obszaru
- własności fizycznych
- pewnych przesłanek co do wyników rozwiązania
  - w podobszarach gdzie poszukiwana funkcja zmienia się gwałtownie, zagęszczamy siatkę elementów
- oczekiwanej efektywności i dokładności obliczeń
  - elementy winny być na tyle małe by aproksymowane wewnątrz nich funkcje mogły być przybliżone za pomocą wielomianów
  - zmniejszanie elementów powoduje wydłużenie czasu obliczeń, oraz zwiększenie maszynowego błędu obliczeń



# Dyskretyzacja

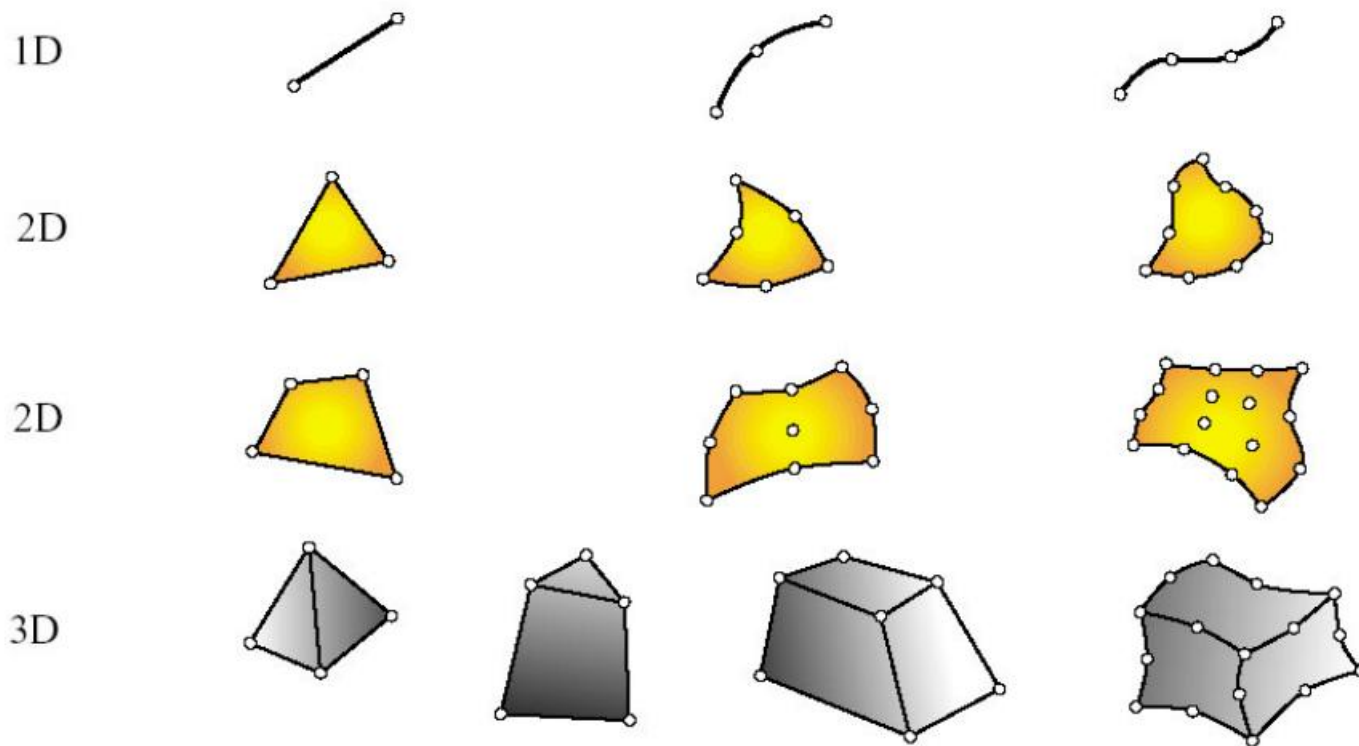
(podział obszaru na elementy skończone)

- **element skończony**

- prosty kształt geometryczny (trójkąt, czworokąt, sześciąt)
- **węzły** – szczególne wyróżnione punkty elementu
- prosty dobór tzw. **funkcji kształtu** (interpolacyjne wielomiany algebraiczne) – funkcji aproksymującej wartości parametru wewnątrz elementu w oparciu o wartości określone w węzłach elementu
- gęsty podział na elementy skończone zapewnia
  - prawidłowy opis rzeczywistego problemu,
  - większą dokładność aproksymacji w punktach wewnątrz elementu

# Dyskretyzacja

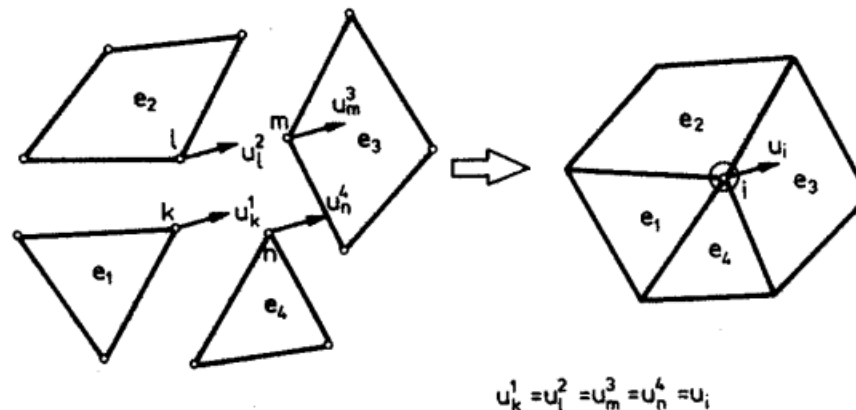
rodzaje elementów skończonych



# Dyskretyzacja

## punkty węzłowe

- dobór węzłów związany jest z wyborem typów elementów
- poszukiwane wartości parametru (funkcji) w tych węzłach, będące skutkiem oddziaływań zewnętrznych na rozpatrywany układ, stanowią podstawowy zbiór niewiadomych – ich wartości zostają otrzymane w wyniku rozwiązania podstawowego układu równań MES
- elementy są **połączone ze sobą w węzłach**, znajdujących się na granicy podziału
- niektóre z węzłów mogą znajdować się również wewnątrz poszczególnych elementów



# Dyskretyzacja

opis elementu przy użyciu funkcji kształtu (w lokalnym układzie współrzędnych)

**Funkcja kształtu** dobierana jest tak, by

- była przedstawiona w postaci wielomianu, możliwie niskiego stopnia
- każdemu węzłowi elementu przypisujemy  $i$ -tą funkcję kształtu  $\mathbf{N}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  tak, aby ( $n_{el}$  – liczba węzłów w elemencie):

$$N_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}$$

$$\sum_{i=1}^{n_{el}} N_i(x, y) = 1$$

- aproksymacji (interpolacji) parametru w punktach elementu dokonuje się ( $T_i$ -wartość parametru obliczona w  $i$ -tym węźle):

$$t(x, y) = \sum_{i=1}^{n_{el}} N_i(x, y) \cdot T_i$$

# Dyskretyzacja

przykład - opis elementu przy użyciu funkcji kształtu

- element trójkątny

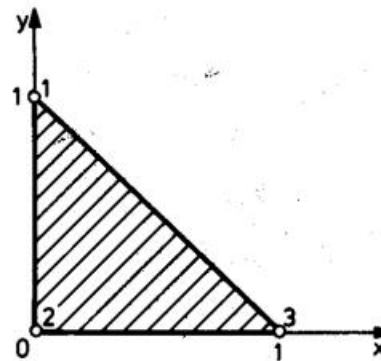
$$N_1(x, y) = y$$

$$N_2(x, y) = 1 - x - y$$

$$N_3(x, y) = x$$

$$T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 3$$

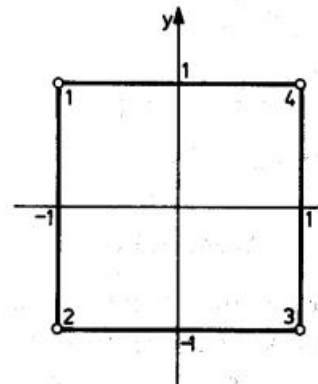
$$t(0.3, 0.4) = \sum_{i=1}^3 T_i N_i(x, y) = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot (1 - 0.3 - 0.4) + 3 \cdot 0.3 = 0.4 + 0.3 + 0.9 = 1.6$$



- element czworokątny

$$N_i(x, y) = \frac{1 + x_i x}{2} \cdot \frac{1 + y_i y}{2}$$

$$i = 1, \dots, 4$$

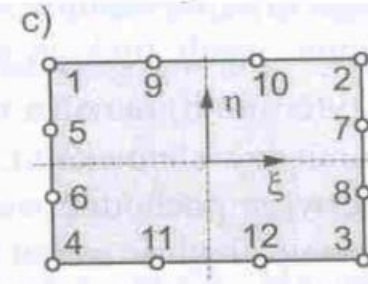
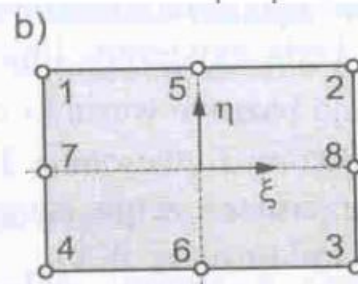
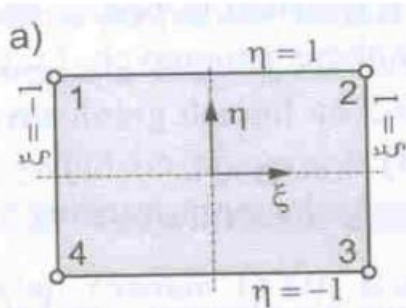
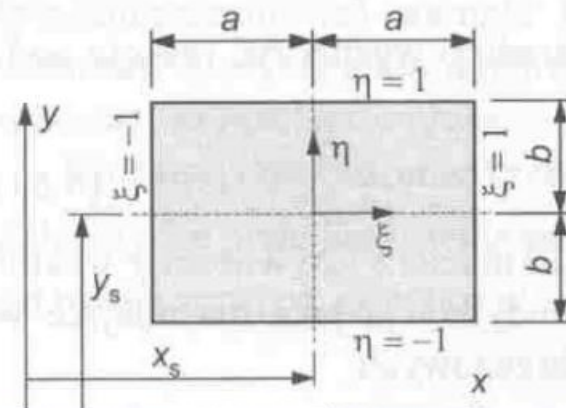


# Dyskretyzacja

przykład - opis elementu przy użyciu funkcji kształtu

Element prostokątny o wymiarach  
**2a×2b**

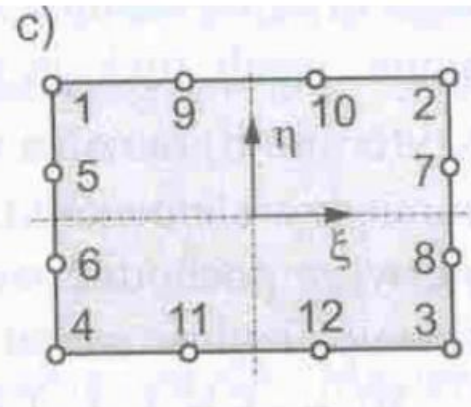
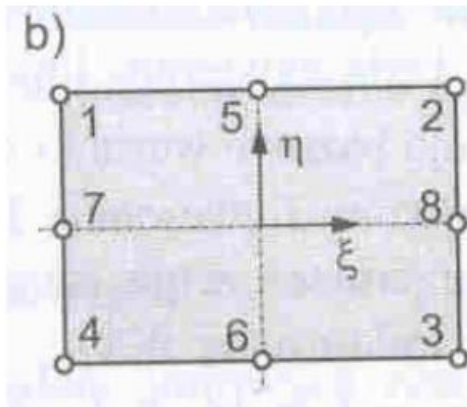
- wprowadzamy współrzędne znormalizowane (lokalne)



$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1 + \xi_i \xi}{2} \cdot \frac{1 + \eta_i \eta}{2}$$

# Dyskretyzacja

przykład - opis elementu przy użyciu funkcji kształtu



$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1+\xi_i\xi}{2} \cdot \frac{1+\eta_i\eta}{2} (\xi_i\xi + \eta_i\eta - 1) \quad i=1, \dots, 4$$

$$N_i(\xi, \eta) = (1-\xi^2) \cdot \frac{1+\eta_i\eta}{2} \quad i=5, 6$$

$$N_i(\xi, \eta) = (1-\eta^2) \cdot \frac{1+\xi_i\xi}{2} \quad i=7, 8$$

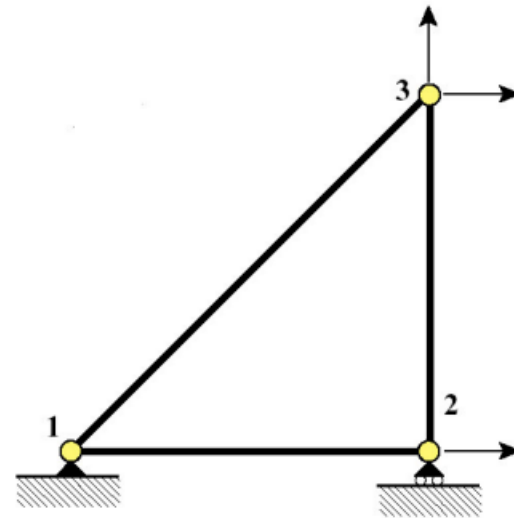
$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32} (1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)[-10+9(\xi_i\xi)^2+9(\eta_i\eta)^2] \quad i=1, \dots, 4$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32} (1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)[1+9\xi_i\xi] \quad i=5, 6, 7, 8$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32} (1+\xi_i\xi)(1-\eta^2)(1+9\eta_i\eta) \quad i=9, \dots, 12$$

## Określenie warunków brzegowych przypisanie węzłom stopni swobody

- **stopień swobody** – ilość prostych ruchów jakie punkt jest w stanie zrealizować w przestrzeni opisanej układem kartezyjańskim
- określenie rodzajów i punktów podparcia



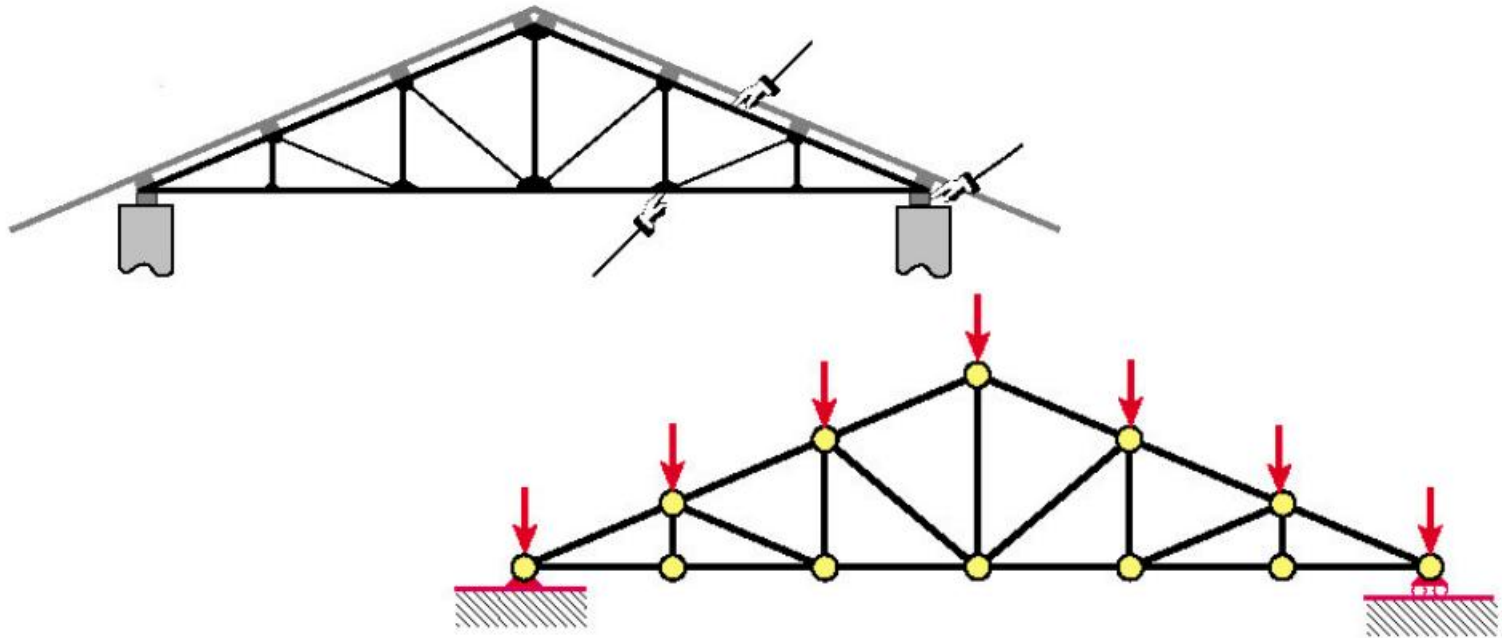
Przykład:

nr węzła	1	2	3
stopień swobody	0	1	2

# Dyskretyzacja

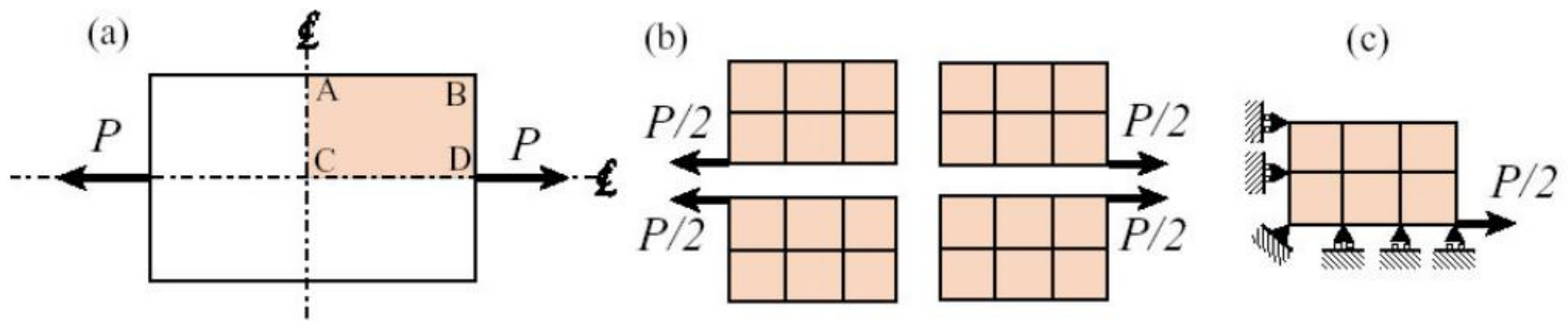
przykład

kratownica dachu



# Dyskretyzacja

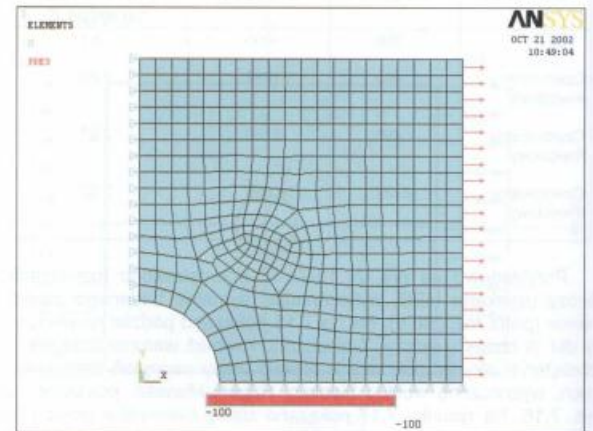
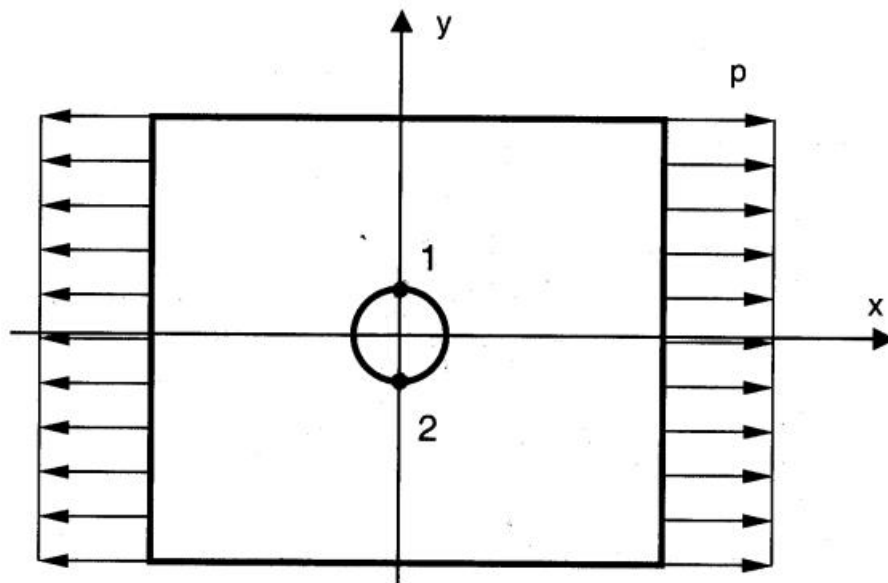
przykład



# Dyskretyzacja

przykład

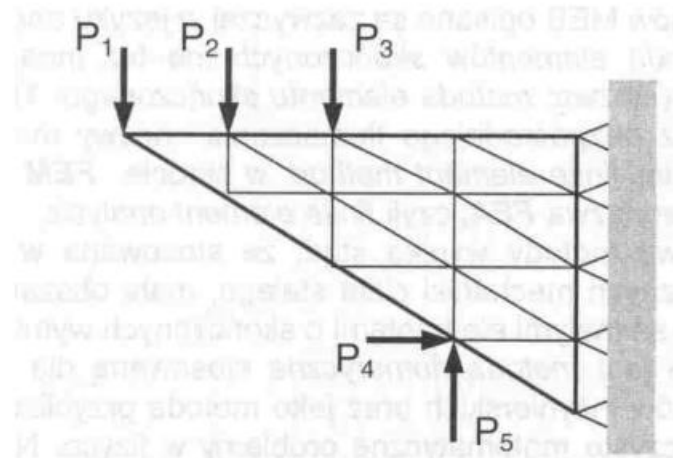
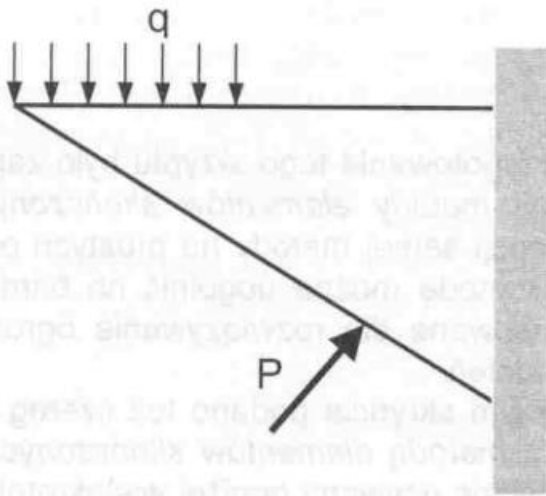
tarcza kwadratowa poddana jednokierunkowemu rozciąganiu



## Określenie warunków brzegowych

przypisanie sił do poszczególnych węzłów

- w miejscach podparć nieprzesuwnych – przemieszczenia są zerowe, w punktach tych wystąpią **niezerowe siły reakcji**
- równomiernie rozłożone obciążenie zewnętrzne **rozkładamy na poszczególne węzły**



# Macierz sztywności elementu

(w przypadku płaskiego stanu naprężenia)

## Oznaczenia:

- **D** - **macierz stałych materiałowych (macierz sprężystości)** – określenie właściwości materiałowych.
  - dla materiału izotropowego, o właściwościach sprężystych w przypadku płaskiego stanu naprężenia
    - **E** – moduł Younga
    - **$\nu$**  - współczynnik Poissona
- **N** - **macierz funkcji kształtu** – zawiera zapisane w postaci macierzowej odpowiednie funkcje kształtu
  - dla trójwęzłowego elementu trójkątnego o wierzchołkach  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ :

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \frac{1}{2\Delta} (x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y)$$

$$N_2 = \frac{1}{2\Delta} (x_3 y_1 - x_1 y_3 + (y_3 - y_1)x - (x_3 - x_1)y) \quad \Rightarrow \quad N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = \frac{1}{2\Delta} (x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y)$$

# Macierz sztywności elementu

(w przypadku płaskiego stanu naprężenia)

Oznaczenia:

- **B** – macierz pochodnych funkcji kształtu

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} N = \frac{1}{2S} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

- **K<sub>e</sub>** – macierz sztywności elementu

$$K_e = \int_V B^T D B dV$$

# Globalna macierz sztywności

- dla każdego elementu układu zostaje obliczona macierz sztywności elementu  $\mathbf{K}_e$  (wymiar macierzy = liczba węzłów elementu • wymiar zadania),
- każda z macierzy  $\mathbf{K}_e$  winna być wyrażona w odniesieniu do jednego (tzw. globalnego) układu współrzędnych,
- **agregacja** – scalenie wszystkich macierzy elementów w jedną macierz sztywności dla całego układu
- $\mathbf{K}$  – **globalna macierz sztywności** wiąże wektor przemieszczeń wszystkich węzłów układu z wektorem obciążeń węzłowych układu

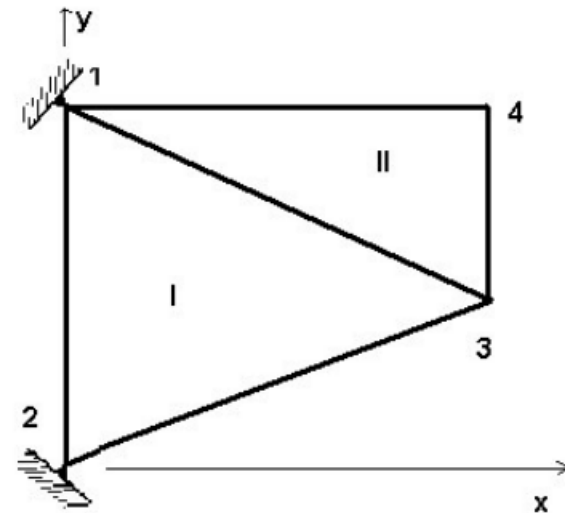
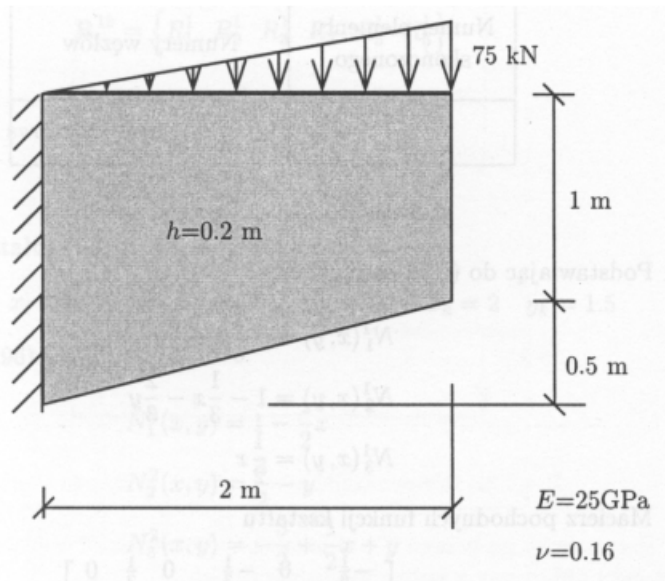
$$[K]\bar{d} = \bar{F}$$

- globalna macierz sztywności jest **symetryczna i osobliwa**
- zadanie MES może zostać rozwiązane dopiero gdy zostaną wprowadzone do niego **warunki brzegowe**

# Przykład obliczeniowy

analiza statyczna tarczy - wyznaczenie przemieszczeń

- tarcza zdyskretyzowana 2 trójwęzłowymi elementami trójkątnymi, pominięto ciężar własny tarczy



- Węzły:

numer	1	2	3	4
x	0	0	2	2
y	1,5	0	0,5	1,5

# Przykład obliczeniowy

analiza statyczna tarczy - wyznaczenie przemieszczeń

## Element I: węzły 1, 2, 3

- pole trójkąta  $S=1,5$
- funkcje kształtu

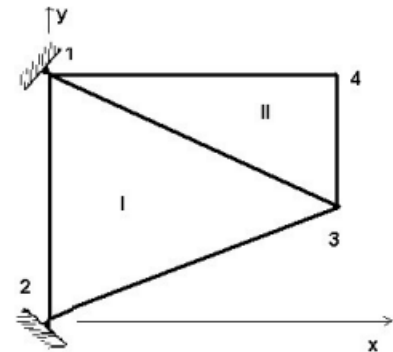
$$N_1(x, y) = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y, \quad N_2(x, y) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y, \quad N_3(x, y) = \frac{1}{2}x$$

- macierz pochodnych funkcji kształtu
- macierz sprężystości

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25,657 & 4,105 & 0 \\ 4,105 & 25,657 & 0 \\ 0 & 0 & 10,776 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

- macierz sztywności elementu

$$K_e = \int_V B^T D B dV = \int_S (B^T D B h) dx dy = S B^T D B h$$



$$B = \begin{bmatrix} -1/6 & 0 & -1/3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & -2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & -1/6 & -2/3 & -1/3 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

# Przykład obliczeniowy

analiza statyczna tarczy - wyznaczenie przemieszczeń

## Element II: węzły 1, 3, 4

- pole trójkąta  $S=1$
- funkcje kształtu

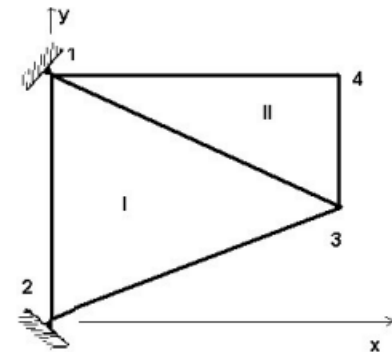
$$N_1(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x, \quad N_2(x, y) = \frac{3}{2} - y, \quad N_3(x, y) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x + y$$

- macierz pochodnych funkcji kształtu
- macierz sprężystości

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25,657 & 4,105 & 0 \\ 4,105 & 25,657 & 0 \\ 0 & 0 & 10,776 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \text{ (kN/m}^2\text{)}$$

- macierz sztywności elementu

$$K_e = \int_V B^T DB dV = \int_S (B^T DB h) dx dy = SB^T DBh$$



$$B = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & -1 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$



# Przykład obliczeniowy

analiza statyczna tarczy – wprowadzenie warunków brzegowych

- **wektor sił**

- obciążenie ciągłe zostaje zastąpione wektorem sił węzłowych

$$F = [0 \quad -25 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -50]^T$$

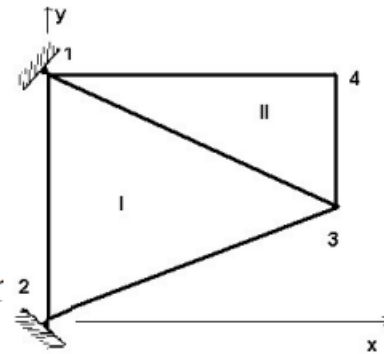
- **zadane przemieszczenia**

- przy założonych obciążeniach przemieszczenia podporowe równe zero

$$d = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6 \quad d_7 \quad d_8]^T \Rightarrow d = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad d_5 \quad d_6 \quad d_7 \quad d_8]^T$$

- **siły reakcji**

- uzyskanie równowagi układu uzyskujemy poprzez wprowadzenie w punktach podpór tzw. sił reakcji



$$R = [R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

## Przykład obliczeniowy

analiza statyczna tarczy – rozwiązanie równania MES

- równanie  $[K]\bar{d} = \bar{F}$  sprowadzamy do równania  $[A]\bar{x} = \bar{F}$ 
  - **macierz  $A$**  zostaje utworzona z macierzy sztywności  $K$ , w przypadku gdy dany punkt (przemieszczenie punktu odpowiada j-tej niewiadomej) został unieruchomiony j-ta kolumna odpowiada j-tej niezerowej reakcji, do macierzy  $K$  wpisujemy kolumnę zer z jedynką na przekątnej głównej
  - **wektor  $x$**  – wektor utworzony z wektora przemieszczeń, w którym gdy dany punkt (przemieszczenie punktu odpowiada j-tej niewiadomej) został unieruchomiony, j-ta współrzędna oznacza siłę reakcji podpory

# Przykład obliczeniowy

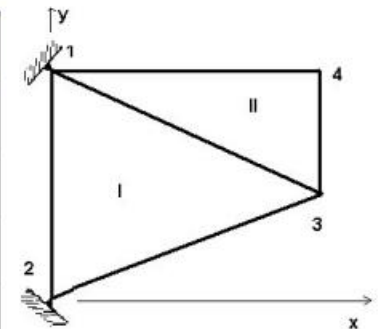
analiza statyczna tarczy – rozwiązanie równania MES

$$[A]x = F$$

Równanie MES												
	1	0	0	0	-0.64143	1.4881	-1.28285	-0.4105		0	41.66667	
	0	1	0	0	1.4881	-0.2694	-1.0776	-0.5388		-25	-18.5561	
A=	0	0	1	0	-1.28285	-1.0776	0	0	F=	0	x=	-66.6667
	0	0	0	1	-0.4105	-0.5388	0	0		0		-31.4439
	0	0	0	0	4.079475	0	-2.1552	-1.0776		0		-8.18211
	0	0	0	0	0	5.9396	-0.4105	-5.1314		0		-52.1253
	0	0	0	0	-2.1552	-0.4105	3.43805	1.4881		0		15.29167
	0	0	0	0	-1.0776	-5.1314	1.4881	5.6702		-50		-61.5584

wyznaczenie przemieszczeń w węzłach i reakcji podpór

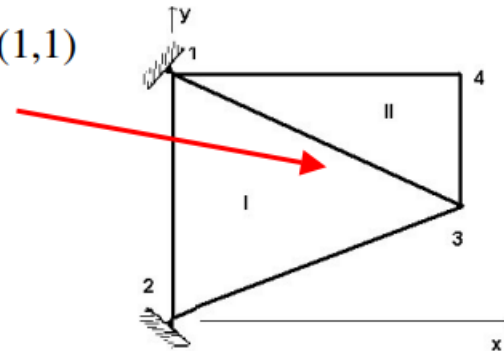
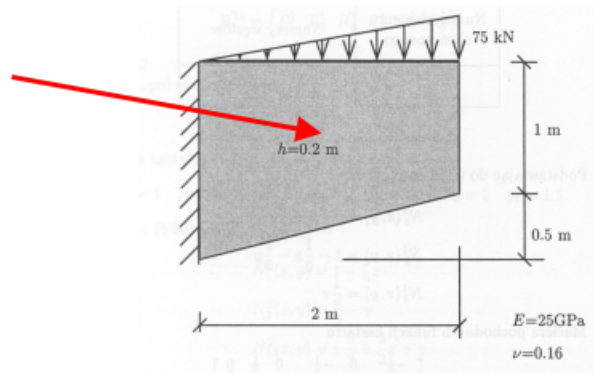
nr węzła	1	2	3	4
przemieszczenie poziome (m)	0	0	-8,18E-06	15,29E-06
przemieszczenie pionowe (m)	0	0	-52,13E-06	-61,56E-06
reakcja pozioma (kN)	-41,7	66,7	0	0
reakcja pionowa (kN)	43,6 (25+18,6)	31,4	0	0



# Przykład obliczeniowy

analiza statyczna tarczy - wyznaczenie przemieszczeń w punktach nie będących węzłami

- przemieszczenia punktu o współrzędnych (1,1)



numer	1	2	3	4
x	0	0	2	2
y	1,5	0	0,5	1,5

- funkcje kształtu:

$$N_1(x, y) = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}y, \quad N_2(x, y) = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y, \quad N_3(x, y) = \frac{1}{2}x$$

- obliczenie przemieszczeń:

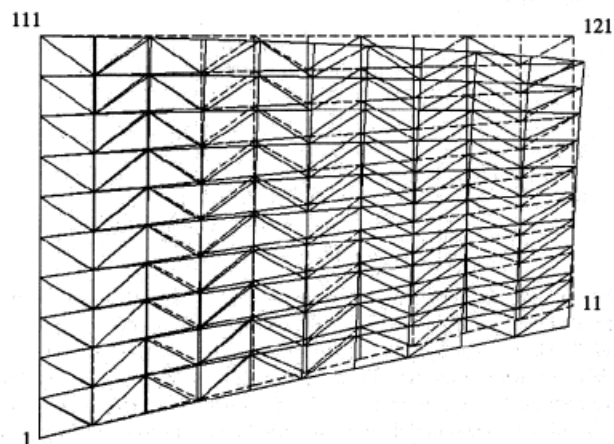
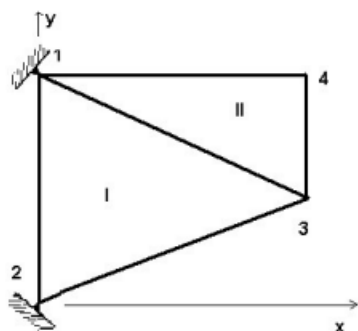
$$d_x = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \cdot x_i = \sum_{i=1}^3 N_i(1,1) \cdot x_i = \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-8.18E-06) = -4.09E-06$$

$$d_y = \sum_{i=1}^3 N_i(1,1) \cdot y_i = N_3(1,1) \cdot y_3 = \frac{1}{2} \cdot (-52.13E-06) = -26.06E-06$$

# Przykład obliczeniowy

analiza statyczna tarczy –porównanie rozwiązań

nr węzła	liczba elementów skończonych	3	4
przemieszczenie poziome (m)	2	-8,18E-06	15,29E-06
przemieszczenie pionowe (m)		-52,13E-06	-61,56E-06
przemieszczenie poziome (m)	200	-33,39E-06	77,99E-06
przemieszczenie pionowe (m)		-154,84E-06	-194,45E-06

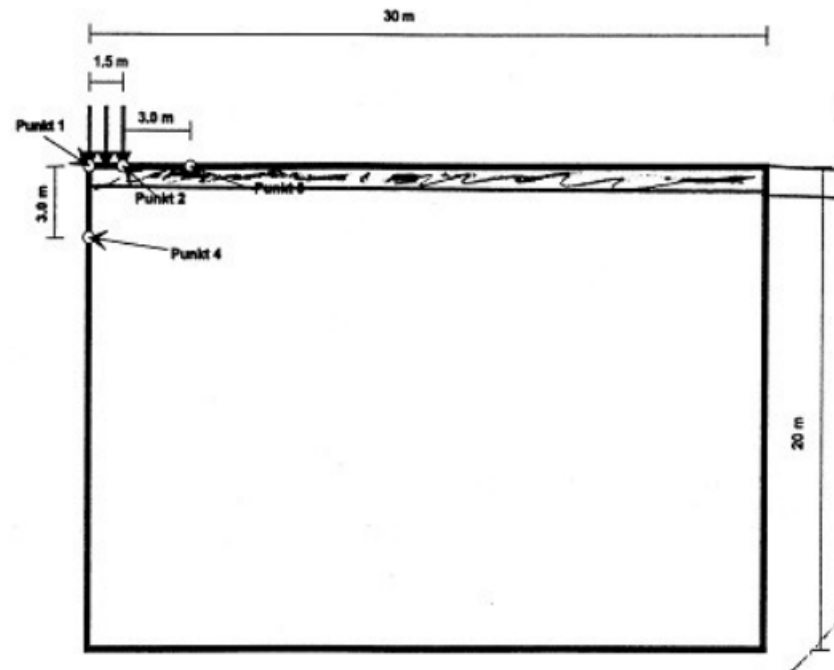


# Przykład obliczeniowy

## analiza osiadania podłoża gruntowego

### model podłoża gruntowego 2D

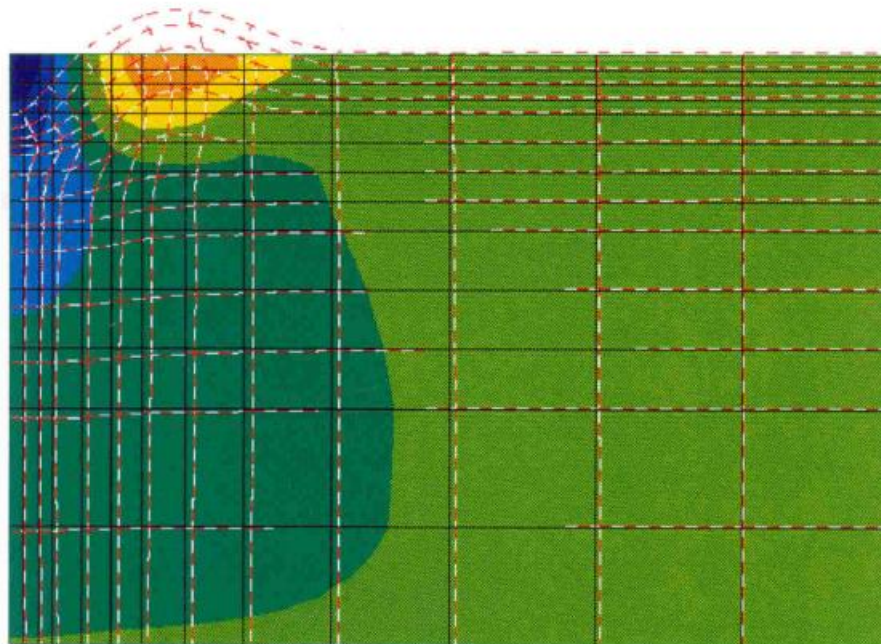
- warstwa grubości 0,5 m - materiał sprężysty
- materiał plastyczny
- obciążenie stępem (równomiernie rozłożoną siłą na odcinku 1,5 m)
- **przedmiotem symulacji – wielkość osiadania pod wpływem przykładanych różnych wartości sił**



# Przykład obliczeniowy

## analiza osiadania podłoża gruntowego

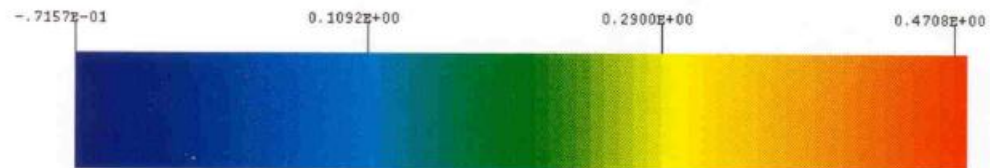
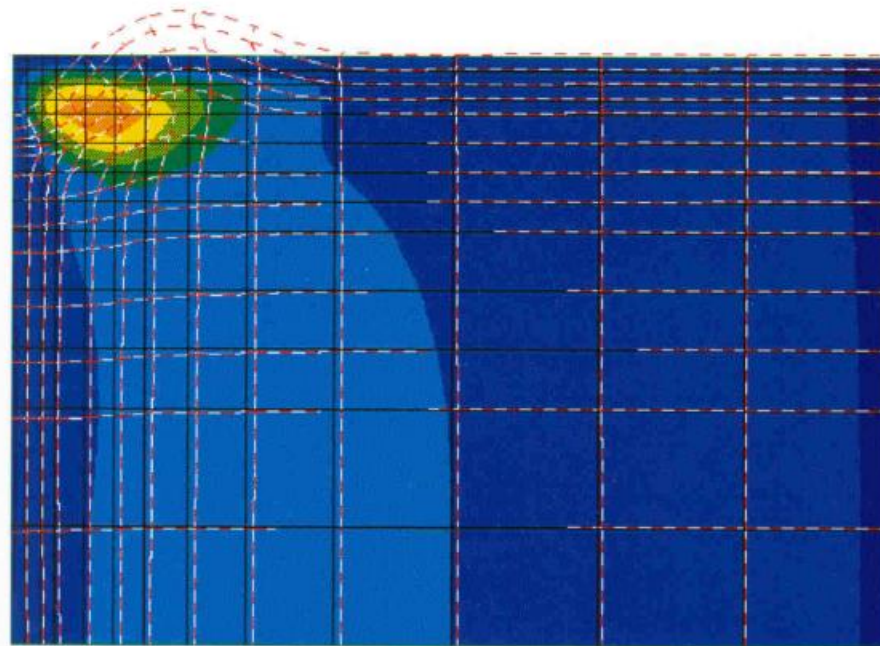
przemieszczenia  
pionowe



# Przykład obliczeniowy

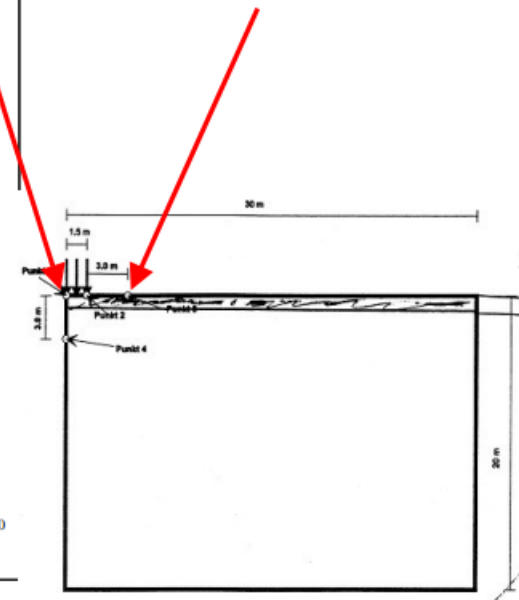
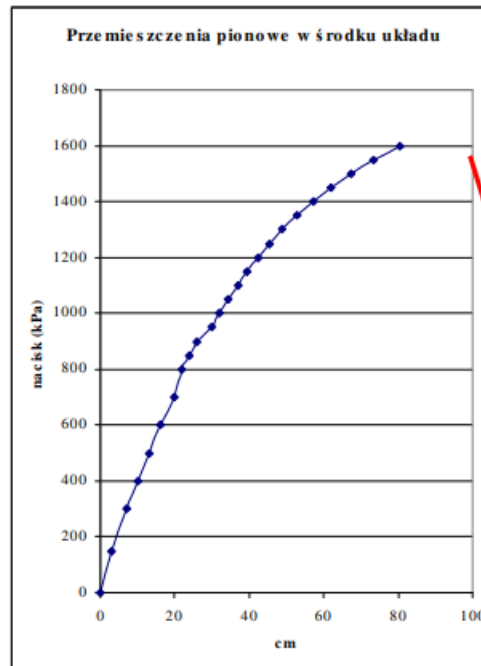
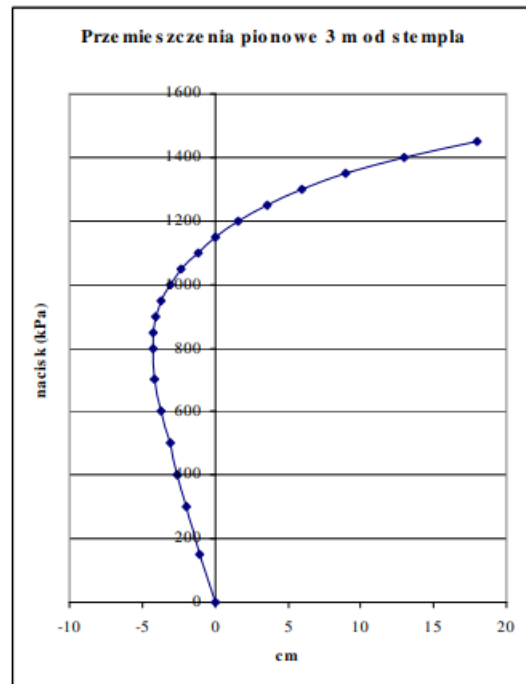
## analiza osiadania podłoża gruntowego

przemieszczenia  
poziome



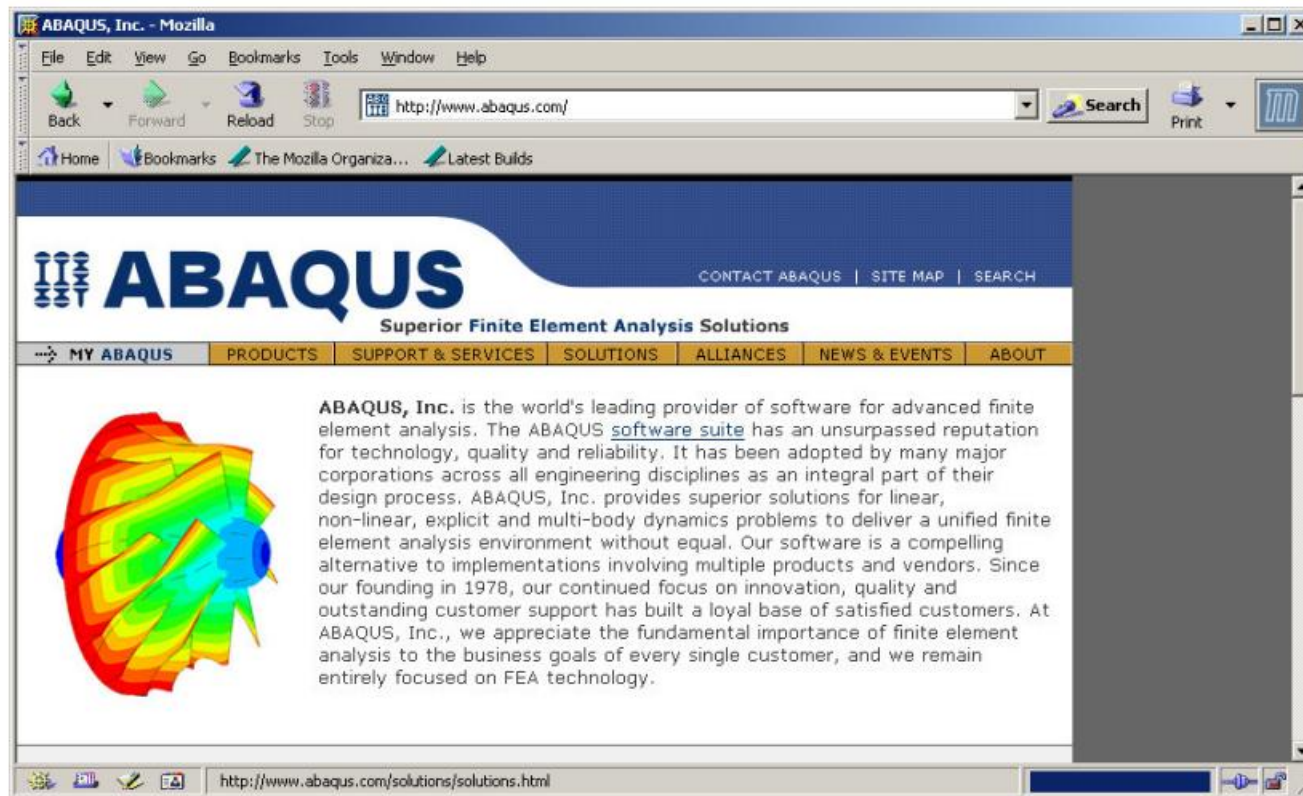
# Przykład obliczeniowy

## analiza osiadania podłoża gruntowego



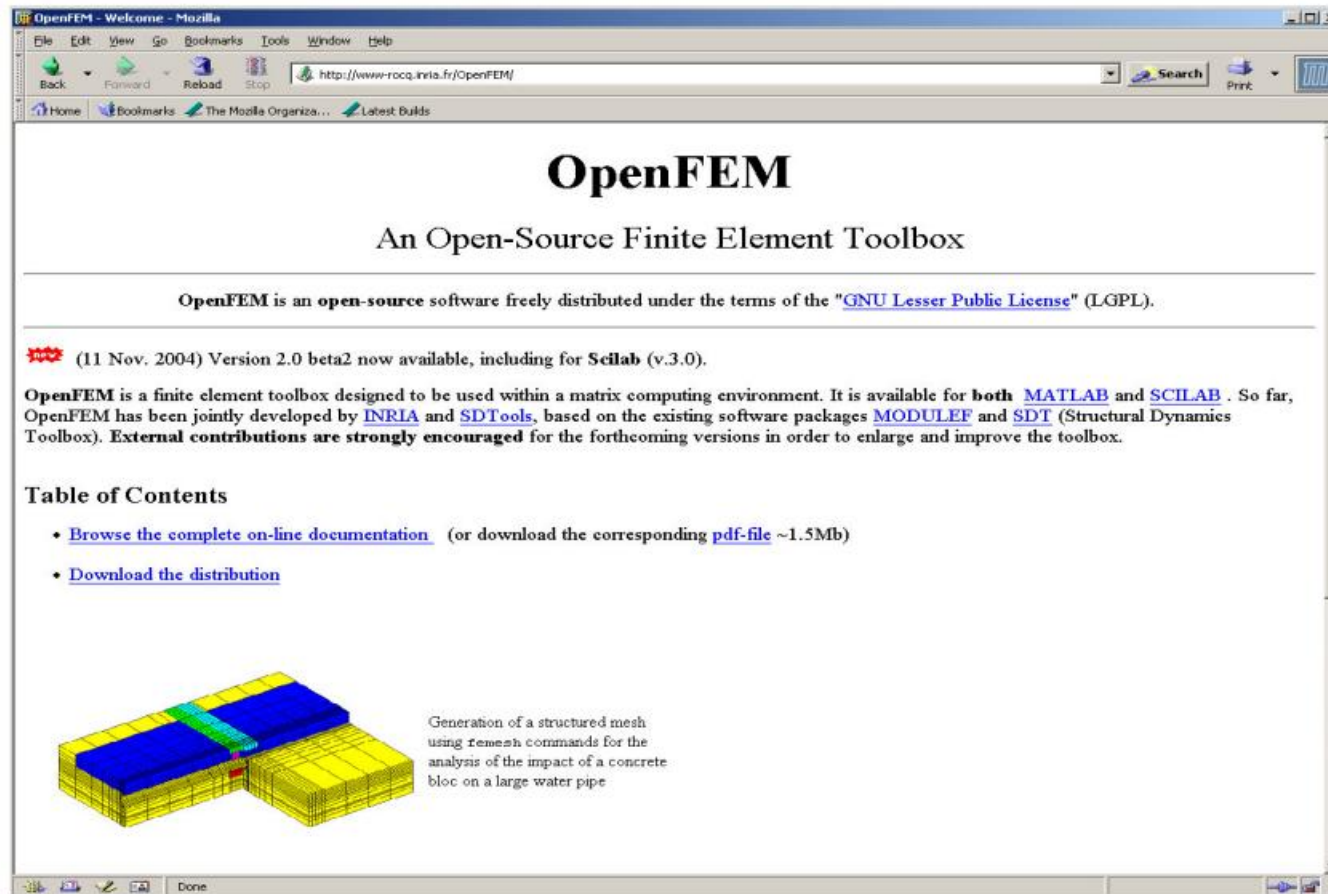
# Oprogramowanie MES

## ABAQUS



# Oprogramowanie MES

## OpenFEM



The screenshot shows a Mozilla browser window titled "OpenFEM - Welcome - Mozilla". The address bar contains "http://www-rocq.inria.fr/OpenFEM/". The main content area features the title "OpenFEM" in a large, bold, serif font, followed by the subtitle "An Open-Source Finite Element Toolbox". Below this, a horizontal line separates the header from the main text. The text states: "OpenFEM is an **open-source** software freely distributed under the terms of the "[GNU Lesser Public License](#)" (LGPL).". A red star icon is followed by the text: "(11 Nov. 2004) Version 2.0 beta2 now available, including for **Scilab** (v.3.0).". The next paragraph describes OpenFEM as a finite element toolbox designed for use within a matrix computing environment, available for both [MATLAB](#) and [SCILAB](#). It mentions that OpenFEM was jointly developed by [INRIA](#) and [SDTools](#), based on existing software packages [MODULEF](#) and [SDT](#) (Structural Dynamics Toolbox). It concludes by stating that external contributions are strongly encouraged for forthcoming versions to enlarge and improve the toolbox. Below the text is a "Table of Contents" section with two bullet points: "Browse the complete on-line documentation" (with a note to download a ~1.5Mb pdf-file) and "Download the distribution". At the bottom left, there is a 3D visualization of a structured mesh for a concrete pipe impact analysis, showing a blue and yellow mesh structure. To the right of the mesh, a caption reads: "Generation of a structured mesh using `remesh` commands for the analysis of the impact of a concrete bloc on a large water pipe". The browser's status bar at the bottom shows "Done".


**OpenFEM**

An Open-Source Finite Element Toolbox

---

OpenFEM is an **open-source** software freely distributed under the terms of the "[GNU Lesser Public License](#)" (LGPL).

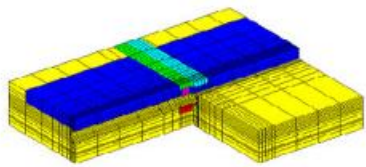
---

 (11 Nov. 2004) Version 2.0 beta2 now available, including for **Scilab** (v.3.0).

OpenFEM is a finite element toolbox designed to be used within a matrix computing environment. It is available for both [MATLAB](#) and [SCILAB](#). So far, OpenFEM has been jointly developed by [INRIA](#) and [SDTools](#), based on the existing software packages [MODULEF](#) and [SDT](#) (Structural Dynamics Toolbox). **External contributions are strongly encouraged** for the forthcoming versions in order to enlarge and improve the toolbox.

**Table of Contents**

- [Browse the complete on-line documentation](#) (or download the corresponding [pdf-file](#) ~1.5Mb)
- [Download the distribution](#)



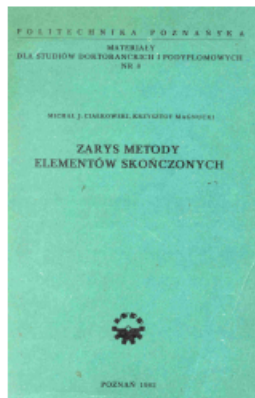
Generation of a structured mesh using `remesh` commands for the analysis of the impact of a concrete bloc on a large water pipe

# Metoda elementów skończonych

## literatura uzupełniająca

Łodygowski T., Kąkol W.

### Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji inżynierskich

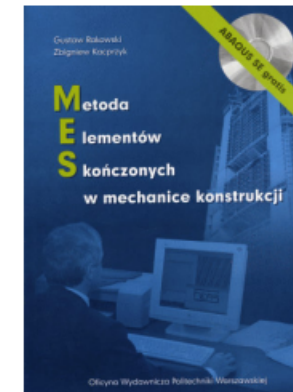


Ciałkowski M., Magnucki K.

### Zarys metody elementów skończonych

Rakowski G., Kacprzyk Z.

### Metoda Elementów Skończonych w mechanice konstrukcji



koniec

w. 4