Metody Numeryczne w inżynierii

Rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych opisujących procesy przepływu ciepła z wykorzystaniem pakietu Scilab - Xcos

w. 3

Równanie różniczkowe cząstkowe – równanie, w którym występuje niewiadoma funkcja dwóch lub więcej zmiennych oraz niektóre z jej pochodnych cząstkowych.

Równania różniczkowe cząstkowe pojawiły się w związku z badaniami procesów drgań rozmaitych środowisk, między innymi drgań strun, prętów, membran, jak również w związku z badaniami zagadnień z zakresu akustyki i hydromechaniki. Pierwsze równanie różniczkowe cząstkowe zostało sformułowane w połowie XVIII wieku przez J. d'Alemberta. Było to równanie – według dzisiejszej nomenklatury – typu hiperbolicznego i powstało w wyniku rozważań nad zagadnieniem struny drgającej. L. Euler (1707–1783) sprecyzował warunki określające jednoznaczność rozwiązania tego równania, tworząc początki teorii równań różniczkowych cząstkowych. Później, kierując się sugestiami natury fizycznej, D. Bernoulli przedstawił rozwiązanie struny drgającej w postaci szeregu trygonometrycznego. Metodę tę rozwinął J. Fourier (1750–1830), tworząc początki teorii szeregów trygonometrycznych.

A.L. Cauchy sformułował zagadnienie początkowe dla równań różniczkowych, zwane dzisiaj zagadnieniem Cauchy'ego.

P. Laplace zauważył, że potencjał siły wzajemnego przyciągania dwóch mas spełnia równanie różniczkowe cząstkowe, które dzisiaj nosi nazwę równania Laplace'a.

S.D. Poisson rozwinął teorię zjawisk przyciągani grawitacyjnego, w związku z którą wprowadził równanie zwane dziś równaniem Poissona. Tak więc badania z zakresu mechaniki nieba i grawimetrii doprowadziły do powstania klasy równań noszących dziś nazwę *równań eliptycznych*.

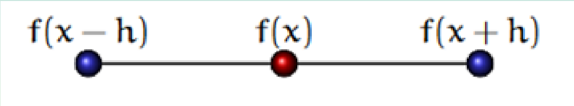
W początkach XIX wieku G. Green stworzył ogólne podstawy teorii potencjału, rozwijając teorię elektryczności i magnetyzmu.

Badania zjawiska przewodnictwa cieplnego oraz dyfuzji gazów i cieczy doprowadziły natomiast do powstania klasy równań, które nazywamy dzisiaj *równaniami parabolicznymi*.

………. itd. patrz: https://pl.wikipedia.org/wiki/Równanie_różniczkowe_cząstkowe
czy też: https://www.impan.pl/swiat-matematyki/notatki-z-wyklado~/skrypt07.pdf

Różnice centralne, wzór dla pierwszej pochodnej

Wzór Taylora – przedstawienie funkcji (*n* + 1)-razy różniczkowalnej za pomocą sumy wielomianu *n*-tego stopnia, zależnego od kolejnych jej pochodnych oraz dostatecznie małej reszty.



Rozwinięcie w szereg Talora:

$$f(x+h) = \frac{h^0}{1!}f(x) + \frac{h^1}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \qquad (1)$$

$$f(x-h) = \frac{h^0}{1!}f(x) - \frac{h^1}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots \qquad (2)$$

Odejmując stronami równania (1) i (2) otrzymujemy:

$$(1) - (2) \;\Rightarrow\; f(x+h) - f(x-h) = 2\frac{h}{1!}f'(x) + 2\frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

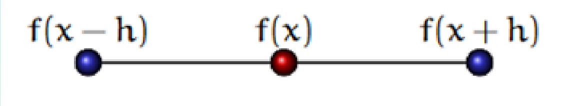
Wyznaczamy stąd $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \cancel{\frac{2h^3}{2h * 3!}f'''(x) + \cdots}$$

Po odrzuceniu reszty pochodna $f'(x)$ wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}$$

Różnice centralne, wzór dla drugiej pochodnej



Rozwinięcie w szereg Taylora:

$$f(x+h) = \frac{h^0}{0!}f(x) + \frac{h^1}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f''''(x) + \cdots \qquad (1)$$

$$f(x-h) = \frac{h^0}{0!}f(x) - \frac{h^1}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f''''(x) + \cdots \qquad (2)$$

Dodając stronami równania (1) i (2) otrzymujemy:

$$(1) + (2) \;\Rightarrow\; f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + \cancel{2}\frac{h^2}{\cancel{2!}}f''(x) + \xcancel{2\frac{h^4}{4!}f''''(x) + \cdots}$$

Po odrzuceniu reszty i prostym przekształceniu pochodna $f''(x)$ wyraża się wzorem:

$$\boldsymbol{f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}}$$

Modelowanie przepływu ciepła w pręcie izolowanym bocznie
Proces jest opisany równaniem różniczkowym cząstkowym

zad.1

Dany jest pręt jednorodny o długości L izolowany bocznie, w którym jest znany początkowy rozkład temperatury (**warunki początkowe**) oraz są zadane warunki na końcach prętu dla t ≥ 0 (**warunki brzegowe**).

Wyznaczyć rozkład temperatury w pręcie dla zadanego przedziału czasu, przyjmując kwantyzację zmiennej x, tj. dzieląc długość pręta L na 5 odcinków.

Funkcja dwóch zmiennych $\boldsymbol{T(x,t)}$, tj. zmiennej przestrzennej x oraz czasu t opisująca pole temperaturowe w pręcie ma postać:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \varkappa * \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \qquad gdzie \quad \varkappa = \frac{\lambda}{c * \rho}$$

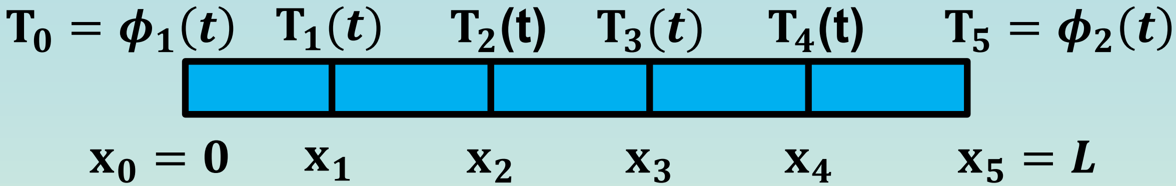
jest ***współczynnikiem wyrównywania temperatur***, zwanym również ***dyfuzyjnością cieplną***. Parametry charakteryzujące materiał, to:

- c ciepło właściwe,
- λ współczynnik przewodności cieplnej,
- ρ gęstość materiału.

Jeżeli materiał jest jednorodny (izotropowy), to $\varkappa = const$.

Warunki początkowe: $T(x,0) = f(x)\ dla\ x \in <0, L>$

oraz brzegowe: $T(0,t) = \phi_1(t) \quad i \quad T(L,t) = \phi_2(t) \quad dla\ t \geq 0$



Rozkład temperatury w pręcie izolowanym bocznie

Dla ustalonych kolejnych wartości x_i pochodna cząstkowa staje się pochodną zwyczajną w kolejnych punktach $x = x_i$ postaci:

$$\left.\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}\right|_{x = x_i} = \frac{dT_i(t)}{dt}$$

A pochodną $\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$, korzystając z aproksymacji różnicami centralnymi dla drugiej pochodnej zastępujemy zależnością:

$$\left.\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x = x_i} = \frac{\partial^2 T_i(x)}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1}(x) - 2T_i(x) + T_{i-1}(x)}{\Delta x^2}$$

w efekcie otrzymujemy układ o parametrach skupionych, opisany równaniami różniczkowo-różnicowymi postaci:

$$\frac{dT_i(t)}{dt} = \frac{\varkappa}{\Delta x^2} * \left(T_{i+1}(x) - 2T_i(x) + T_{i-1}(x)\right) \quad dla \quad i = 1,2,3,4 \quad gdzie \quad \frac{\varkappa}{\Delta x^2} = B$$

z warunkami początkowymi: $T(x_i, 0) = f(x_i) \quad dla \quad i = 1,2,3,4$

oraz z wymuszeniami na końcach pręta, wynikającymi z warunków brzegowych:

$$T_0 = \phi_1(t) \quad i \quad T_5 = \phi_2(t) \quad dla \;\; t \geq 0$$

Rozważymy trzy warianty warunków brzegowych, tj.

1. **na końcach pręta przyłożone są jednorodne wartości temperatury równe 0**

$$\phi_1(t) = 0$$
$$\phi_2(t) = 0$$

2. **lewy koniec pręta jest ogrzewany do stałej temperatury A a prawy równy 0**

$$\phi_1(t) = A * (1 - \exp(-\alpha * t))$$
$$\phi_2(t) = 0$$

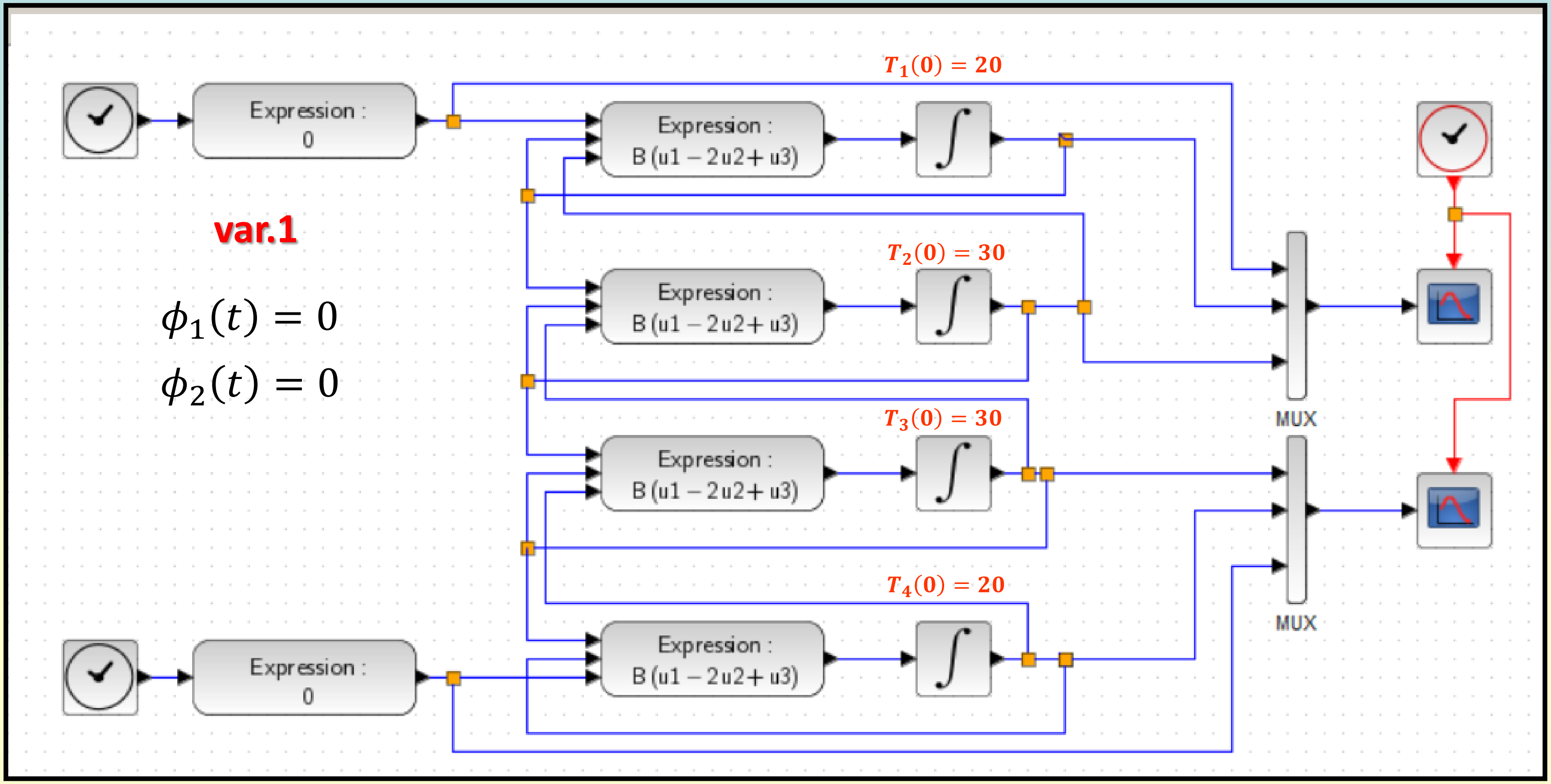
3. **obydwa końce pręta są ogrzewane do stałej temperatury A**

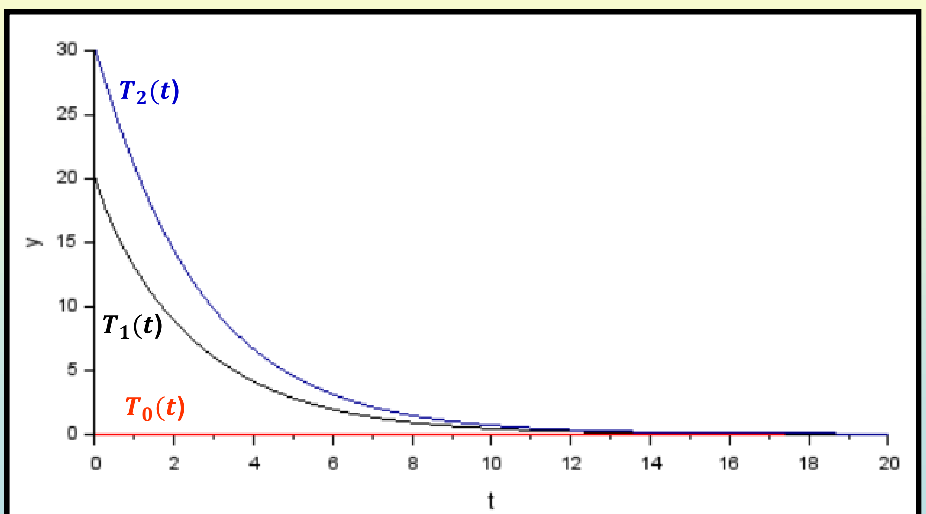
$$\phi_1(t) = A * (1 - \exp(-\alpha * t))$$
$$\phi_2(t) = A * (1 - \exp(-\alpha * t))$$

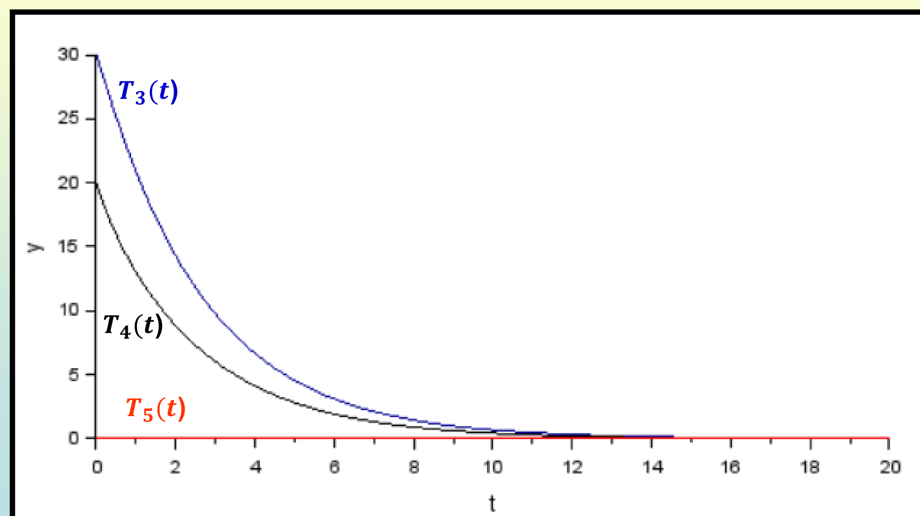
Dla każdego wariantu przyjmiemy następujące warunki początkowe:

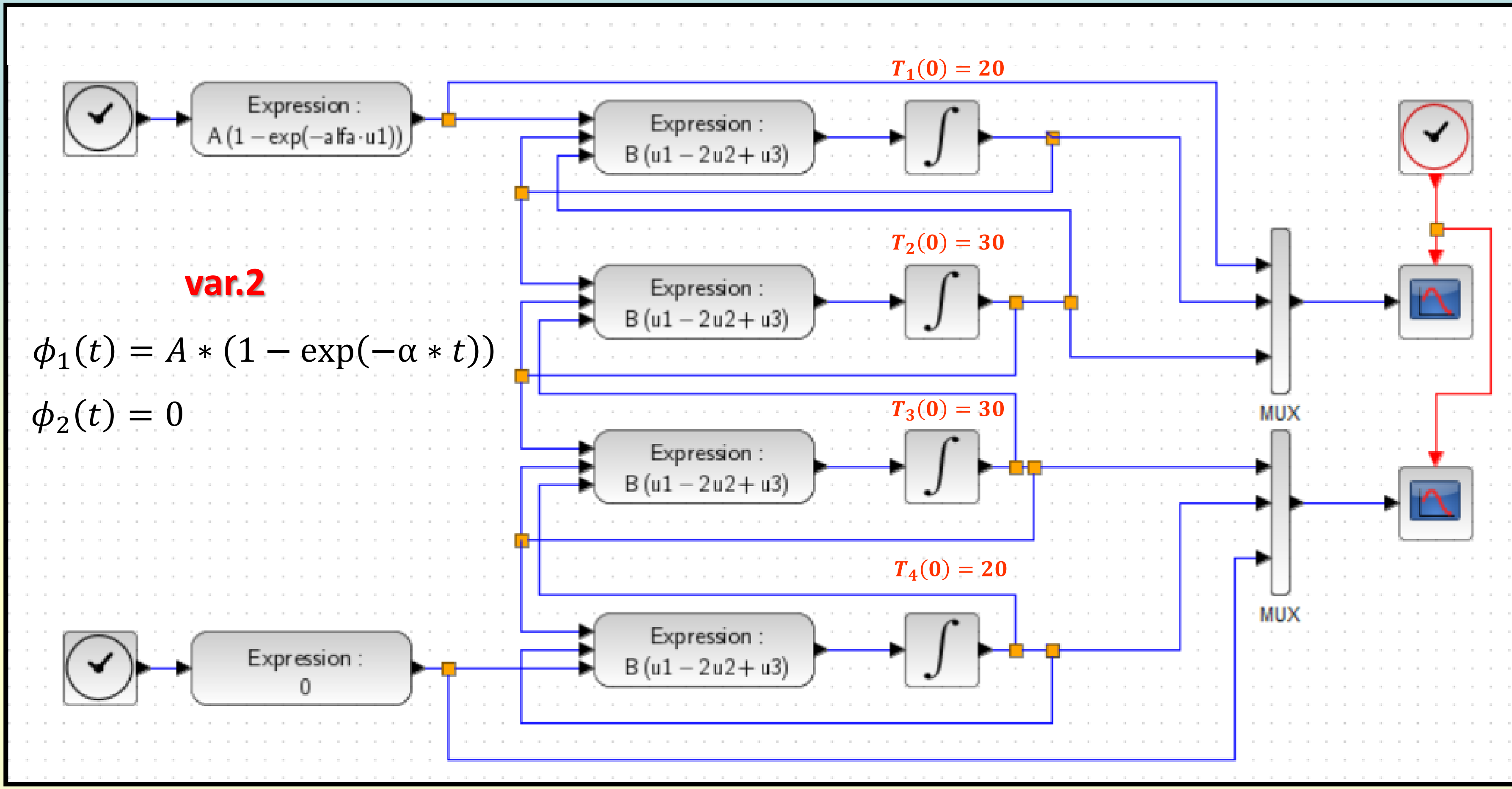
$$T_1(0) = 20, \qquad T_2(0) = 30, \qquad T_3(0) = 30, \qquad T_4(0) = 20$$

oraz dane: $B = 1, \quad A = 25, \quad \alpha = 0.4, \quad t_{kon} = 20$

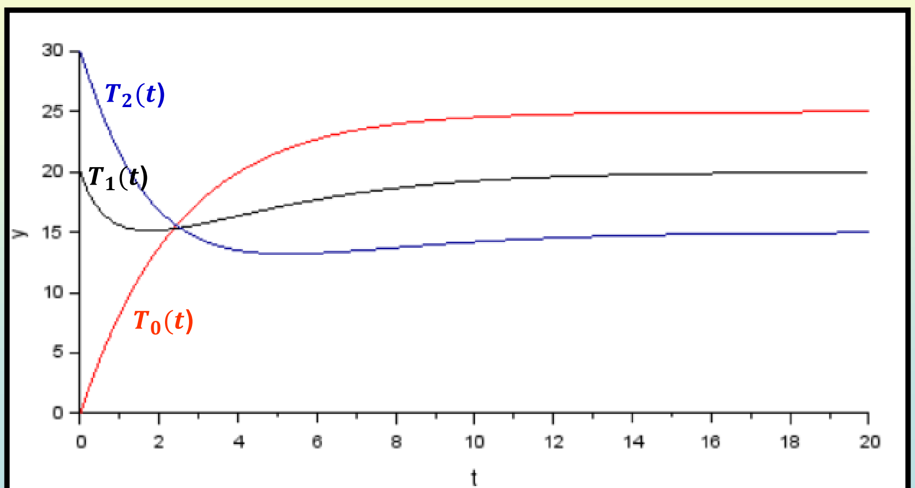

Expression : 0
Expression : B (u1 – 2u2+ u3)
Expression : B (u1 – 2u2+ u3)
Expression : B (u1 – 2u2+ u3)
Expression : B (u1 – 2u2+ u3)
Expression : 0
$T_1(0) = 20$
$T_2(0) = 30$
$T_3(0) = 30$
$T_4(0) = 20$
var.1
$\phi_1(t) = 0$
$\phi_2(t) = 0$
MUX
MUX


$T_2(t)$
$T_1(t)$
$T_0(t)$
y
t
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
0 5 10 15 20 25 30

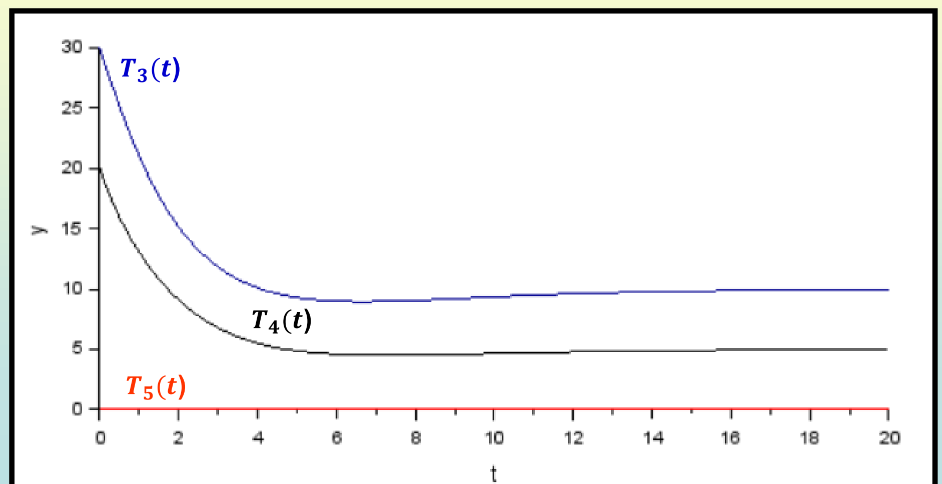

$T_3(t)$
$T_4(t)$
$T_5(t)$
y
t
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20
0 5 10 15 20 25 30



var.2
$\phi_1(t) = A * (1 - \exp(-\alpha * t))$
$\phi_2(t) = 0$
Expression : A (1 − exp(−alfa·u1))
Expression : 0
Expression : B (u1 − 2u2 + u3)
$T_1(0) = 20$
$T_2(0) = 30$
$T_3(0) = 30$
$T_4(0) = 20$
MUX



$T_2(t)$
$T_1(t)$
$T_0(t)$
y
t

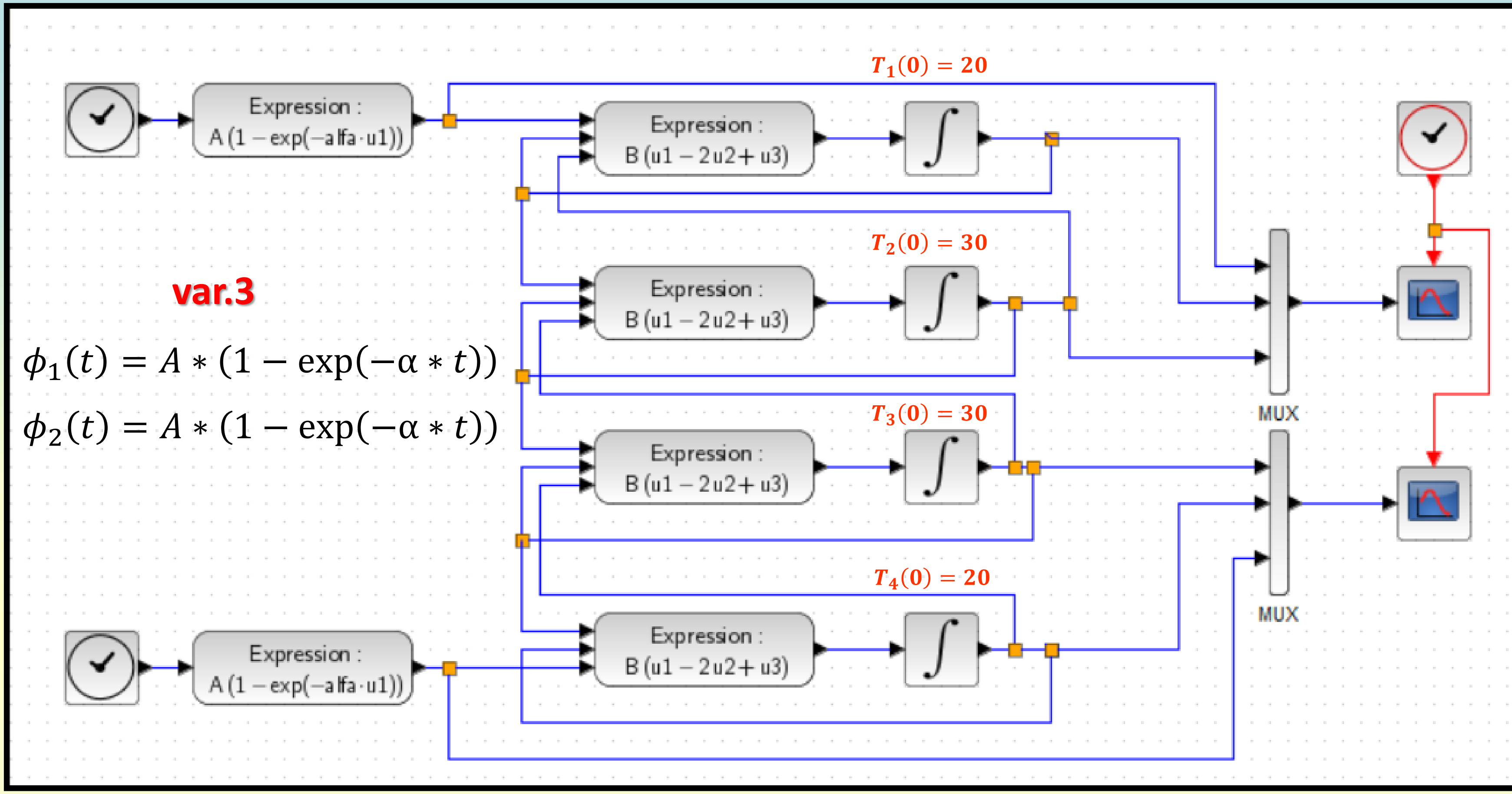


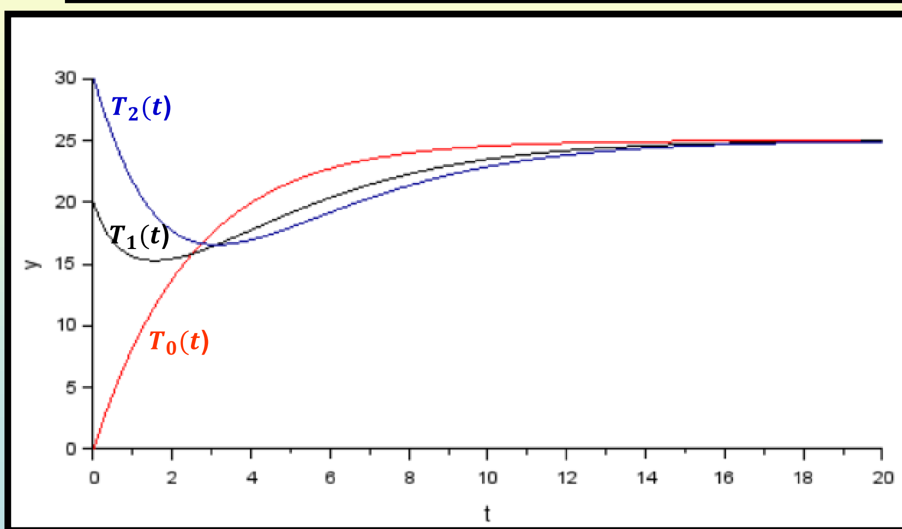
$T_3(t)$
$T_4(t)$
$T_5(t)$
y
t

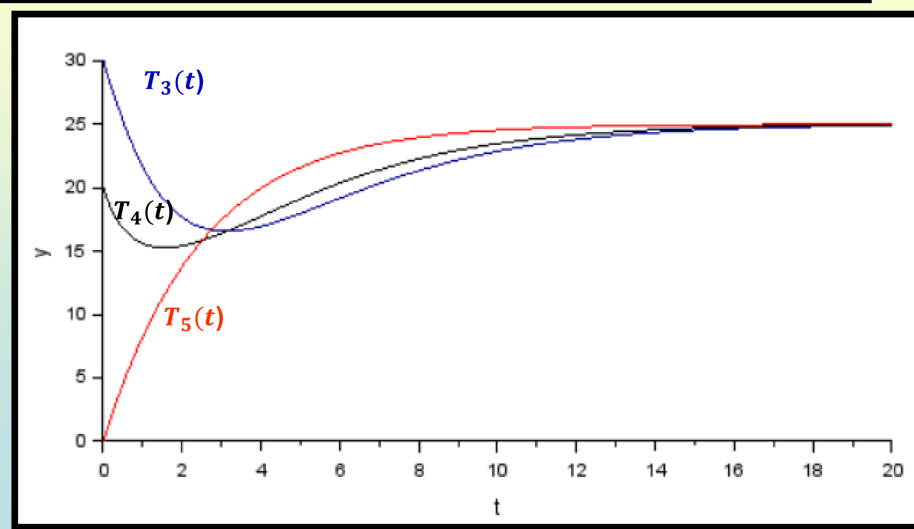
var.3

$$\phi_1(t) = A * (1 - \exp(-\alpha * t))$$

$$\phi_2(t) = A * (1 - \exp(-\alpha * t))$$







zad.2

Dany jest pręt jednorodny o długości L izolowany bocznie i na obu końcach (warunki brzegowe), w którym jest znany początkowy rozkład temperatury (warunki początkowe).

Wyznaczyć rozkład temperatury w pręcie dla zadanego przedziału czasu, przyjmując kwantyzację zmiennej x, tj. dzieląc długość pręta L na 4 odcinki.

Funkcja dwóch zmiennych $T(x,t)$, tj. zmiennej przestrzennej x oraz czasu t opisująca pole temperaturowe w pręcie ma postać:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \varkappa * \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \qquad gdzie \quad \varkappa = \frac{\lambda}{c * \rho}$$

z warunkami początkowymi:

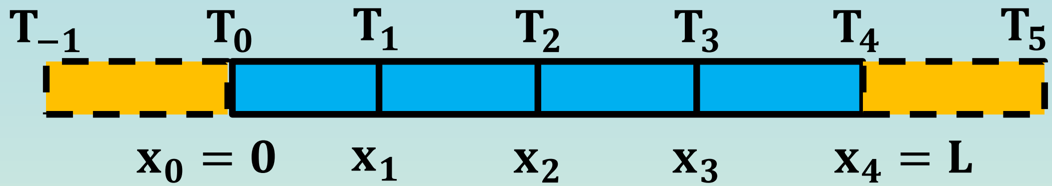
$$T(\Delta x, 0) = T1, \qquad T(2\Delta x, 0) = T2, \qquad T(3\Delta x, 0) = T3$$

oraz brzegowymi:

$$T(0,t) = T0 \quad i \quad T(L,t) = T4$$

Równanie to zastępujemy (jak poprzednio) równaniem różniczkowo-różnicowym postaci:

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{\lambda}{c * \rho * \Delta x^2} * (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \quad dla \quad i = 0, 1, 2, 3, 4 \qquad (\mathbf{1})$$



Rozkład temperatury w pręcie izolowanym całkowicie

gdzie: T_{-1} i T_5 - temperatury w "umownych" punktach pręta, pozwalające wyrazić w postaci analitycznej odpowiednie warunki brzegowe.

Z warunków brzegowych (końce pręta izolowane o stałej temperaturze) wynika, że

$$\left.\frac{\partial\, T_0}{\partial x}\right|_{x\,=\,0} = 0 \qquad \text{i} \qquad \left.\frac{\partial\, T_4}{\partial x}\right|_{x\,=\,L} = 0 \qquad \mathbf{(2)}$$

Korzystając z aproksymacji różnicami centralnymi pierwszej pochodnej postaci

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x\,=\,x_i} = \frac{\partial T_i}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} \qquad \mathbf{(3)}$$

dla i = 0, otrzymujemy $\frac{T_1 - T_{-1}}{2\Delta x} = 0$ **stąd** $T_{-1} = T_1$ $\mathbf{(4)}$

oraz odpowiednio dla i = 4 $\frac{T_5 - T_3}{2\Delta x} = 0$ **stąd** $T_5 = T_3$ $\mathbf{(5)}$

Wykorzystując zależności (4) i (5) w (1) otrzymujemy ostatecznie układ równań różniczkowo-różnicowych postaci:

$$\frac{dT_0}{dt} = \frac{2 * \lambda}{c * \rho * \Delta x^2} * (T_0 - T_1)$$

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{\lambda}{c * \rho * \Delta x^2} * (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \quad dla \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{dT_5}{dt} = \frac{2 * \lambda}{c * \rho * \Delta x^2} B * (T_3 - T_4)$$

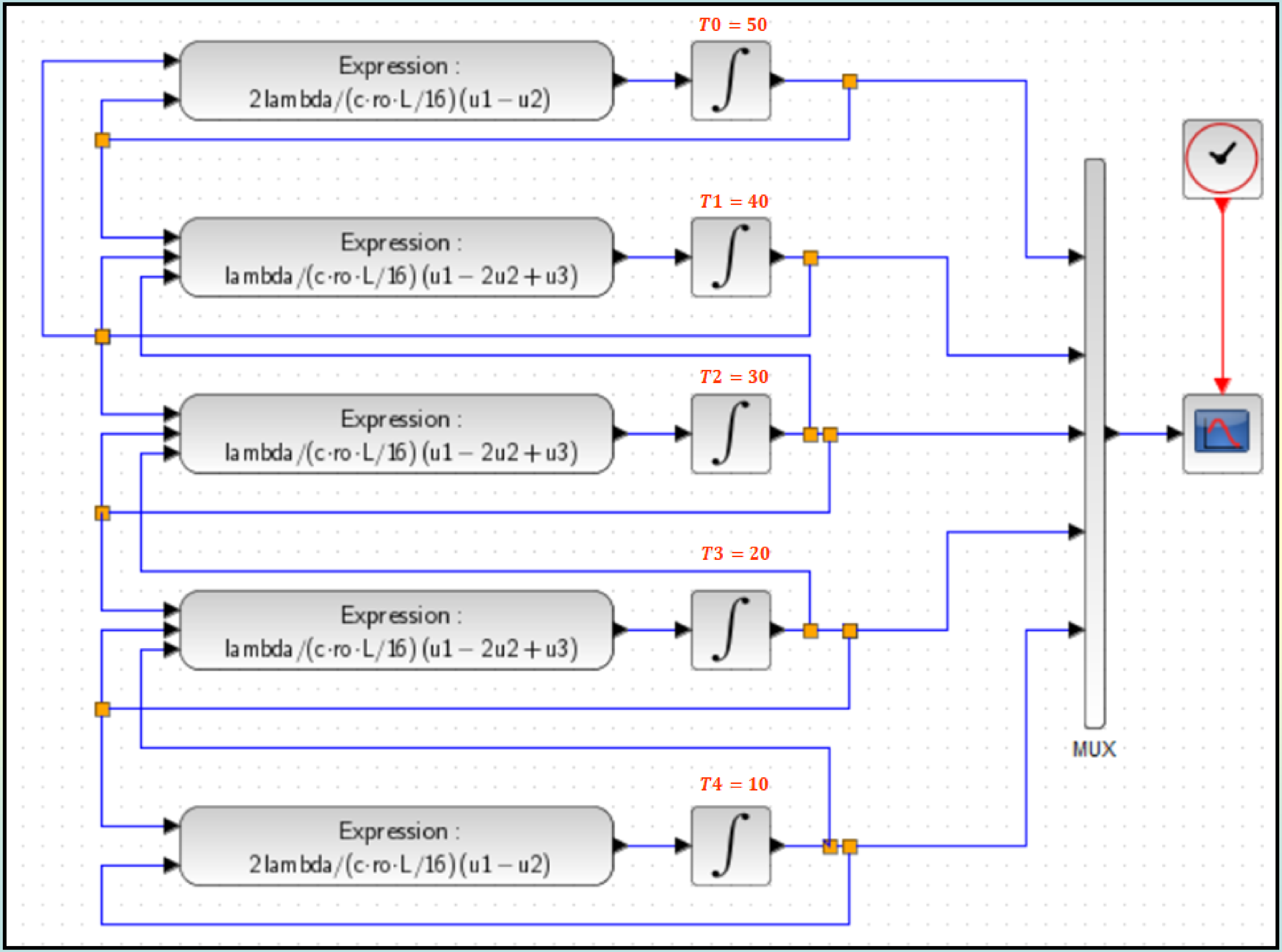
z warunkami początkowymi:

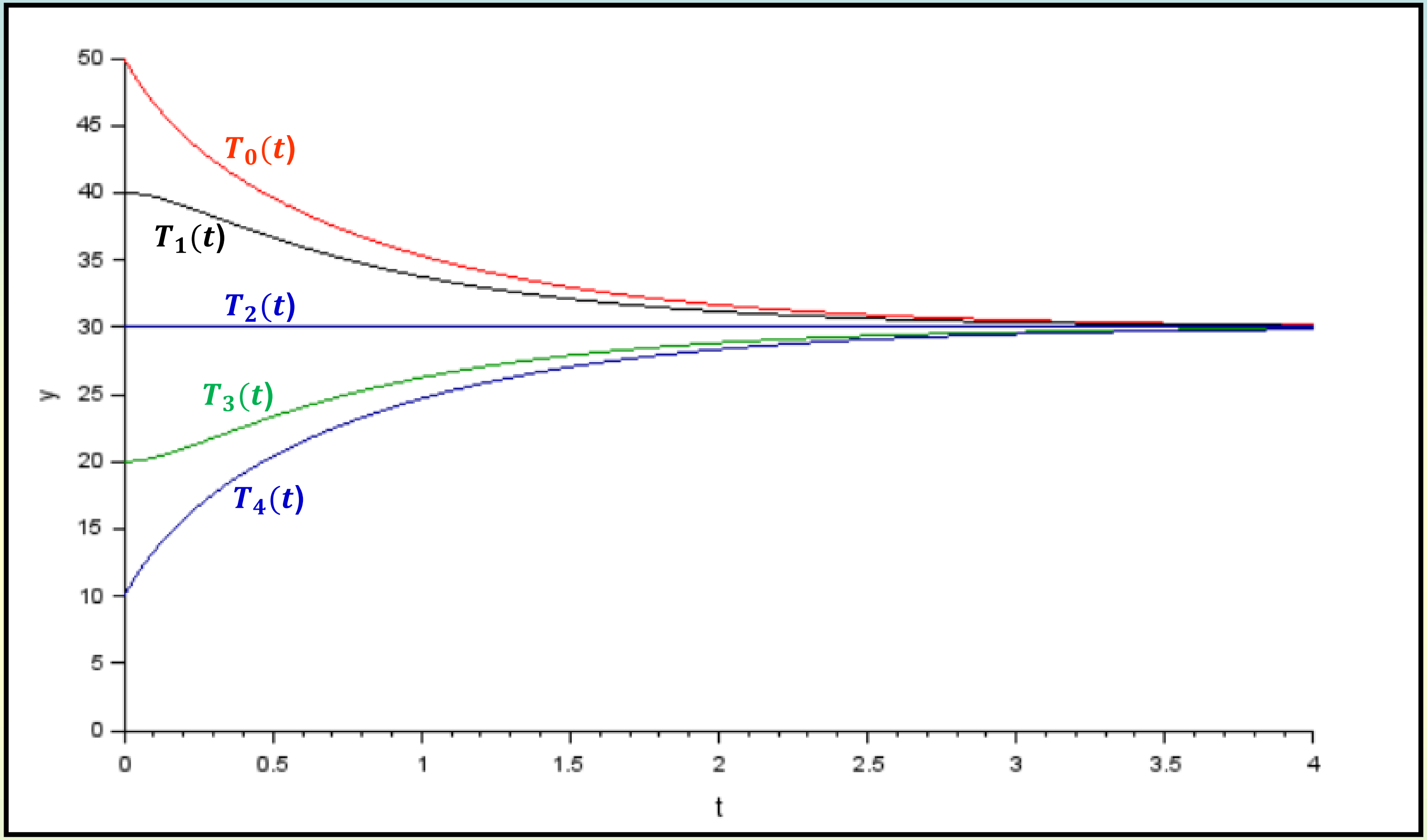
$$T_0(0) = T0,\ T_1(0) = T1,\ T_2(0) = T2,\ T_3(0) = T3,\ \ T_4(0) = T4$$

Dane: $T_0(0) = 50,\ T_1(0) = 40,\ T_2(0) = 30,\ T_3(0) = 20,\ \ T_4(0) = 10$

$\lambda = 311, \qquad \rho = 19290, \qquad \mathrm{c} = 0.1294, \qquad \mathrm{L} = 1, \qquad \Delta\mathrm{x} = \mathrm{L}/4$

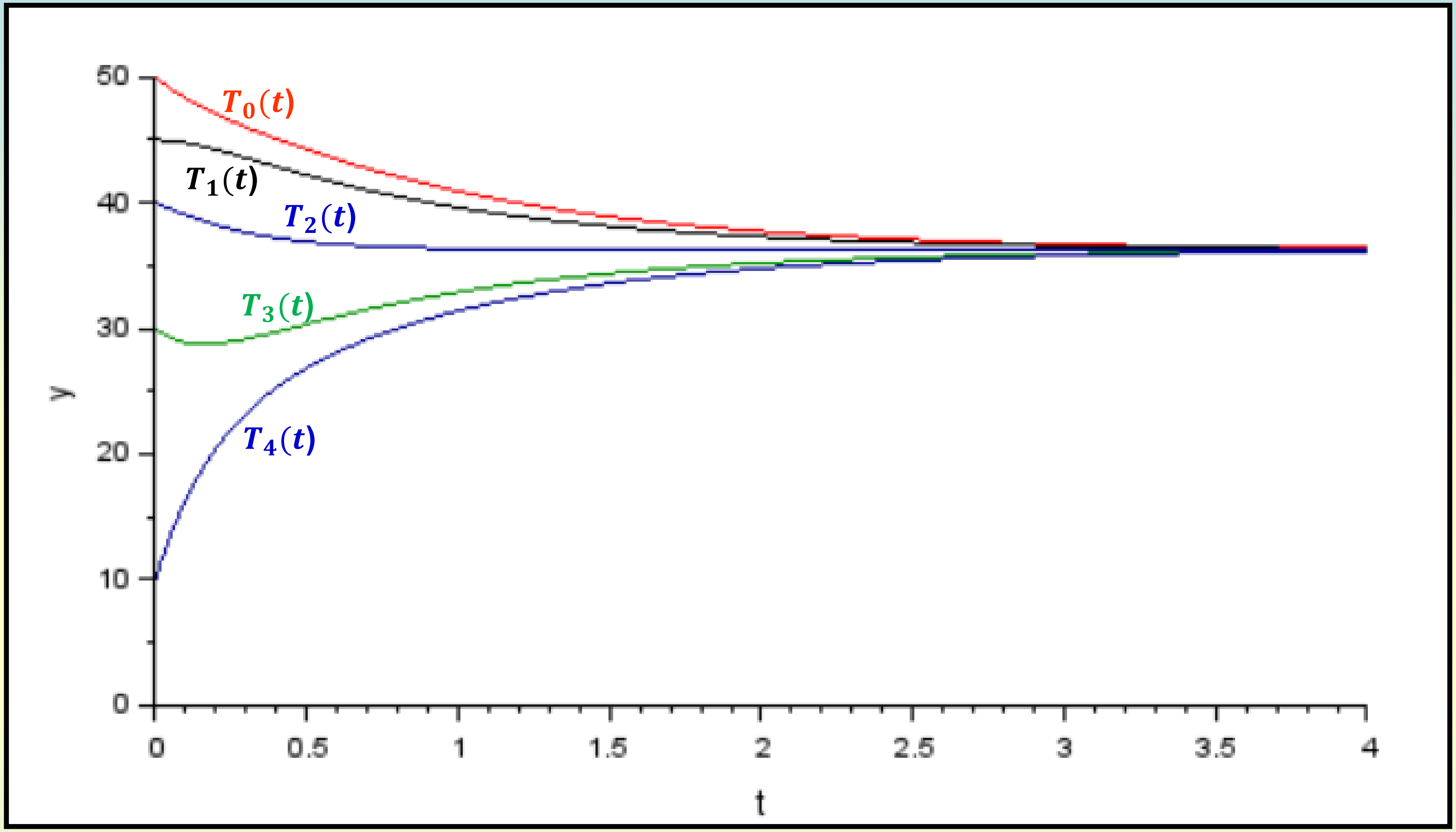
$t_{kon} = 4$


T0 = 50
Expression :
2lambda/(c·ro·L/16)(u1 – u2)
T1 = 40
Expression :
lambda/(c·ro·L/16)(u1 – 2u2 + u3)
T2 = 30
Expression :
lambda/(c·ro·L/16)(u1 – 2u2 + u3)
T3 = 20
Expression :
lambda/(c·ro·L/16)(u1 – 2u2 + u3)
T4 = 10
Expression :
2lambda/(c·ro·L/16)(u1 – u2)
MUX



Rozkład temperatur $T(t)$ **w punktach** x_0**,** x_1**,** x_2**,** x_3**,** x_4 **pręta**

$$T_0(0) = 50,\; T_1(0) = 40,\; T_2(0) = 30,\; T_3(0) = 20,\; T_4(0) = 10$$



Rozkład temperatur $T(t)$ **w punktach** x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 **pręta**

$$T_0(0) = 50,\ T_1(0) = 45,\ T_2(0) = 40,\ T_3(0) = 30,\ T_4(0) = 10$$

zad.3

Płyta równoległościenna o grubości $0 \leq x \leq a$ (nieskończenie długa w kierunkach y oraz z) jest nagrzewana strumieniem cieplnym $q = const$, wpływającym do jej wnętrza przez powierzchnię x = 0. Temperatura ściany bocznej x = a płyty jest równa temperaturze otoczenia w stanie początkowym $T_{płyty} = T_{otoczenia} = 0$

Wyznaczyć przebieg temperatury w punktach wewnętrznych płyty.

Funkcja dwóch zmiennych $T(x,\tau)$, tj. zmiennej przestrzennej x oraz czasu τ opisująca pole temperaturowe w płycie ma postać:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = \varkappa * \frac{\partial^2 T(x,\tau)}{\partial x^2} \qquad gdzie \quad \varkappa = \frac{\lambda}{c * \rho}$$

z warunkami początkowymi:

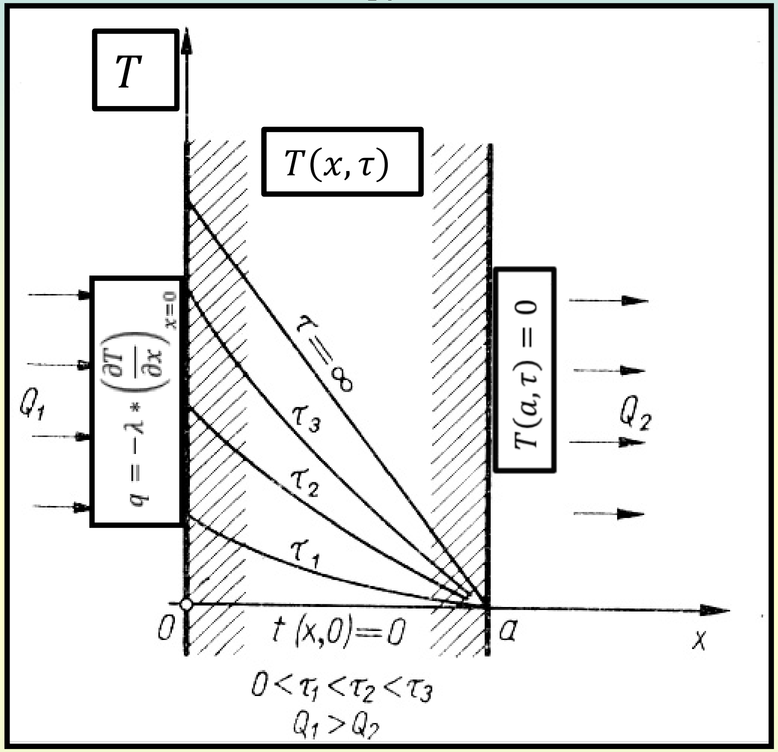
$$T(x,0) = 0$$

oraz brzegowymi:

$$\left.\begin{aligned} \lambda * \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} &= -q \\ T(a,\tau) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad dla \quad \tau \geq 0$$

Po podzieleniu przedziału $0 \le x \le a$ na N równych części, otrzymujemy punkty na osi Ox

$$x_i = i * \Delta x = i * \frac{a}{N} \quad dla \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$



Rozkład temperatury w przekroju punkty

Następnie przechodzimy od równania różniczkowego cząstkowego do układu równań różniczkowo-różnicowych, postaci:

$$\frac{dT_i}{d\tau} = \frac{\lambda}{c * \rho * \Delta x^2} * (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \qquad dla \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1 \qquad \Delta x = \frac{a}{N}$$

ostatecznie:

$$\frac{dT_i}{d\tau} = \frac{\lambda * N^2}{c * \rho * a^2} * (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \qquad dla \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

Układ: $$\frac{dT_i}{d\tau} = \frac{\lambda * N^2}{c * \rho * a^2} * (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \qquad dla \qquad i = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

Wartości T_0 i T_N wyznaczamy z warunków brzegowych:

$$\lambda \frac{T_1 - T_0}{\Delta x} = -q \qquad \textbf{i} \qquad T_N = 0$$

ostatecznie: $$T_0 = T_1 + \frac{a * q}{N * \lambda} \qquad T_N = 0$$

Uwzględniając warunki brzegowe w równaniach różniczkowo-różnicowych otrzymujemy końcowy układ równań różniczkowych uwzględniających warunki brzegowe:

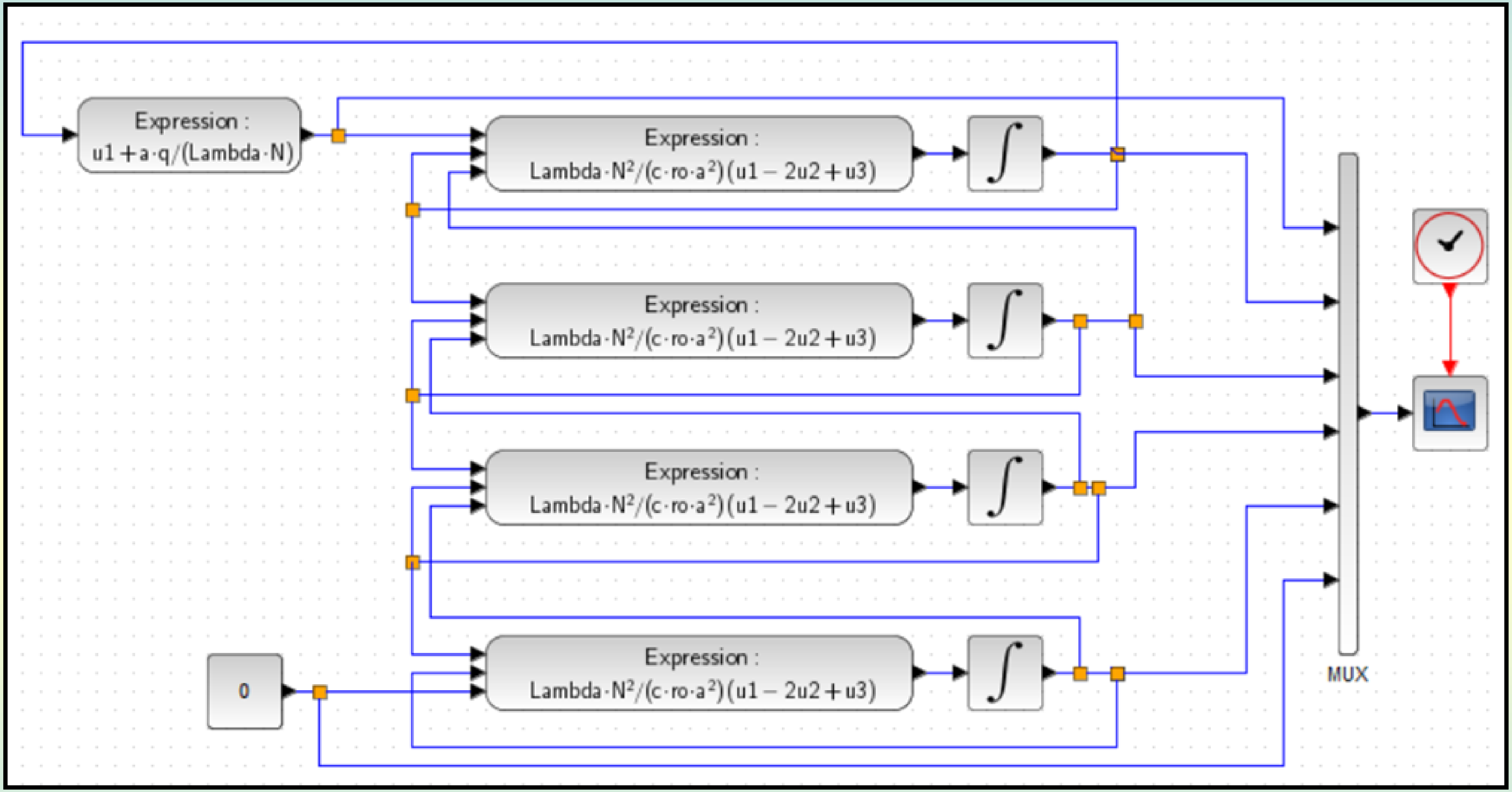
$$T_0 = T_1 + a * q/(N * \lambda)$$
$$\frac{dT_1}{d\tau} = B * (T_2 - 2 * T_1 + T_0)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dT_i}{d\tau} = B * (T_{i+1} - 2 * T_i + T_{i-1})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dT_{N-1}}{d\tau} = B * (T_N - 2 * T_{N-1} + T_{N-2})$$
$$T_N = 0$$

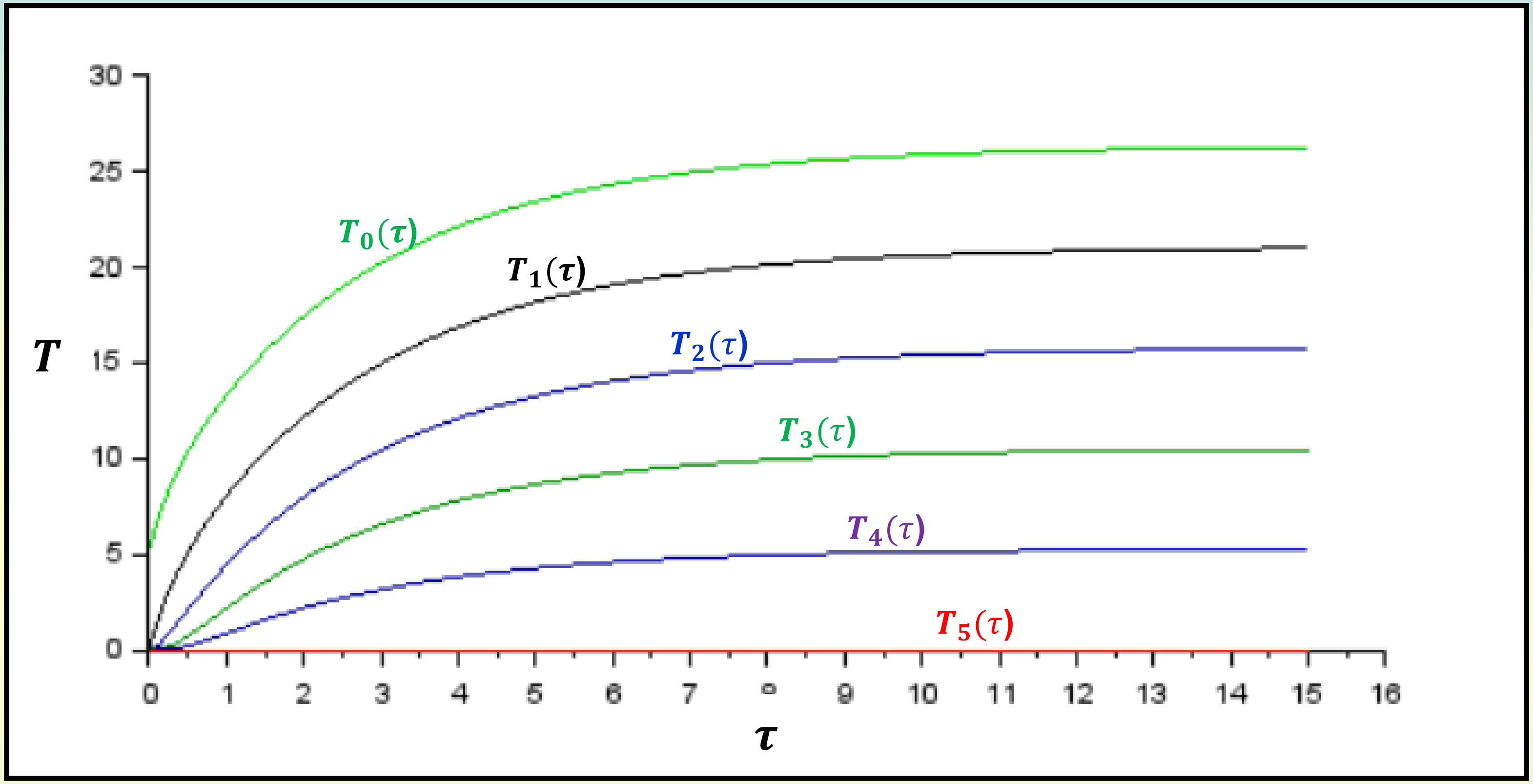
gdzie $$B = \frac{\lambda * N^2}{c * \rho * a^2}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

i warunki początkowe: $$T_1(0) = T_2(0) = T_3(0) = \ \dots = T_{N-1}(0)$$

Dane: $$a = 1;\ \ N = 5;\ \ c = 0.1294;\ \ \rho = 19290;\ \ \lambda = 311;$$
$$q = 8186;\ \ h = 10;\ \ \tau_{kon} = 15$$


Expression :
u1 + a·q/(Lambda·N)
Expression :
Lambda·N²/(c·ro·a²)(u1 − 2u2 + u3)
Expression :
Lambda·N²/(c·ro·a²)(u1 − 2u2 + u3)
Expression :
Lambda·N²/(c·ro·a²)(u1 − 2u2 + u3)
Expression :
Lambda·N²/(c·ro·a²)(u1 − 2u2 + u3)
0
MUX



Rozkład temperatur $T(\tau)$ **w punktach** x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 **przekroju płyty:**

$$T_0(0) = 0,\ T_1(0) = 0,\ T_2(0) = 0,\ T_3(0) = 0,\ T_4(0) = 0,\ T_5(0) = 0$$

zad.4

Płyta równoległościenna o grubości $0 \le x \le a$ (nieskończenie długa w kierunkach y oraz z) jest nagrzewana strumieniem cieplnym q=const, wpływającym do jej wnętrza przez powierzchnię x = 0. Drugą ścianą boczną x = a płyta oddaje ciepło do otoczenia, zgodnie z prawem Newtona ze stałym współczynnikiem wymiany ciepła h = const. W stanie początkowym $T_{płyty} = T_{otoczenia} = 0$.

Wyznaczyć przebieg temperatury w punktach wewnętrznych płyty.

Funkcja dwóch zmiennych $T(x,\tau)$,tj. zmiennej przestrzennej x oraz czasu τ opisująca pole temperaturowe w płycie ma postać:

$$\frac{\partial T(x,\tau)}{\partial \tau} = \varkappa * \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \qquad gdzie \quad \varkappa = \frac{\lambda(T)}{c * \rho} \qquad oraz \quad \lambda(T) = \lambda_1 + \lambda_2 * \mathrm{T}$$

jeżeli $\lambda_2 \neq 0$ - płyta anizotropowa

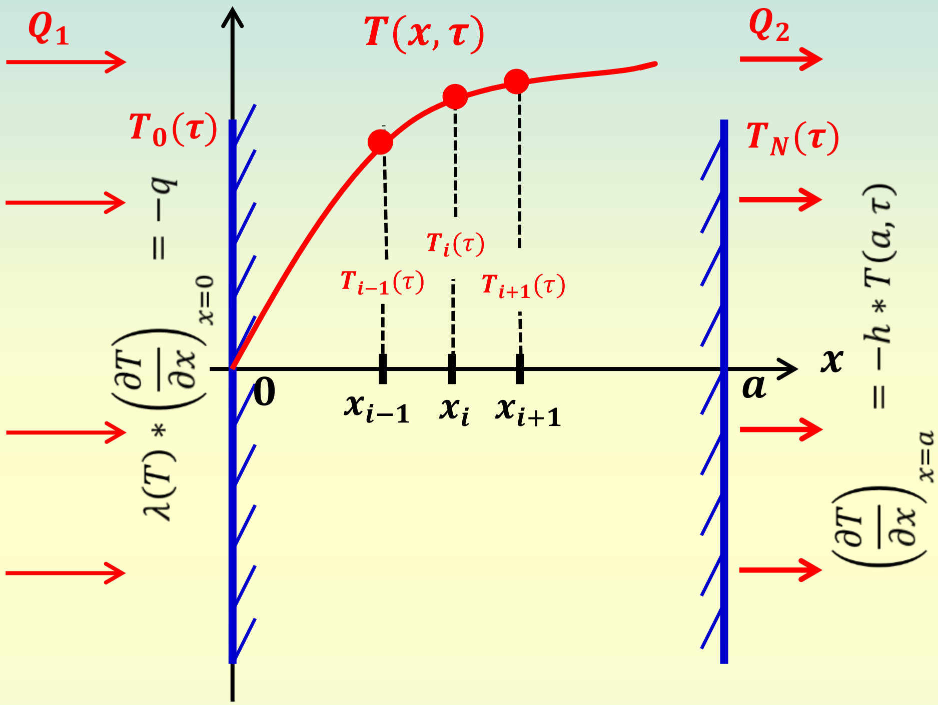
z warunkami początkowymi: $T(x,0) = 0$

oraz brzegowymi:

$$\left.\begin{aligned} \lambda(T) * \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} &= -q \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=a} &= -h * T(a,\tau) \end{aligned}\right\} \quad dla \ \ \tau \ge 0$$

Po podzieleniu przedziału $0 \leq x \leq a$ na N równych części, otrzymujemy punkty na osi Ox

$$x_i = i * \Delta x = i * \frac{a}{N} \quad dla \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$



Rozkład temperatury w przekroju punkty dla wybranej chwili czasowej.

Następnie przechodzimy od równania różniczkowego cząstkowego do układu równań różniczkowo-różnicowych, postaci:

$$\frac{dT_i}{dt} = \frac{\lambda(T_i)}{c * \rho * \Delta x^2} * (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \qquad dla \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

$$\Delta x = \frac{a}{N} \qquad \frac{\lambda(T_i)}{c * \rho * \Delta x^2} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 * T_i) * N^2}{c * \rho * a^2} = f(T_i) \quad dla \quad i = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

więc $$\frac{dT_i}{d\tau} = f(T_i) * (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \qquad dla \qquad i = 1, 2, 3, \dots, N-1$$

Wartości T_0 i T_N wyznaczamy z warunków brzegowych:

$$\lambda(T_1)\frac{T_1 - T_0}{\Delta x} = -q \qquad \textbf{i} \qquad \frac{T_N - T_{N-1}}{\Delta x} = -h * T_N$$

ostatecznie: $$T_0 = T_1 + \frac{a * q}{N * (\lambda_1 + \lambda_2 * T_1)} \qquad T_N = \frac{T_{N-1}}{1 + h * \frac{a}{N}}$$

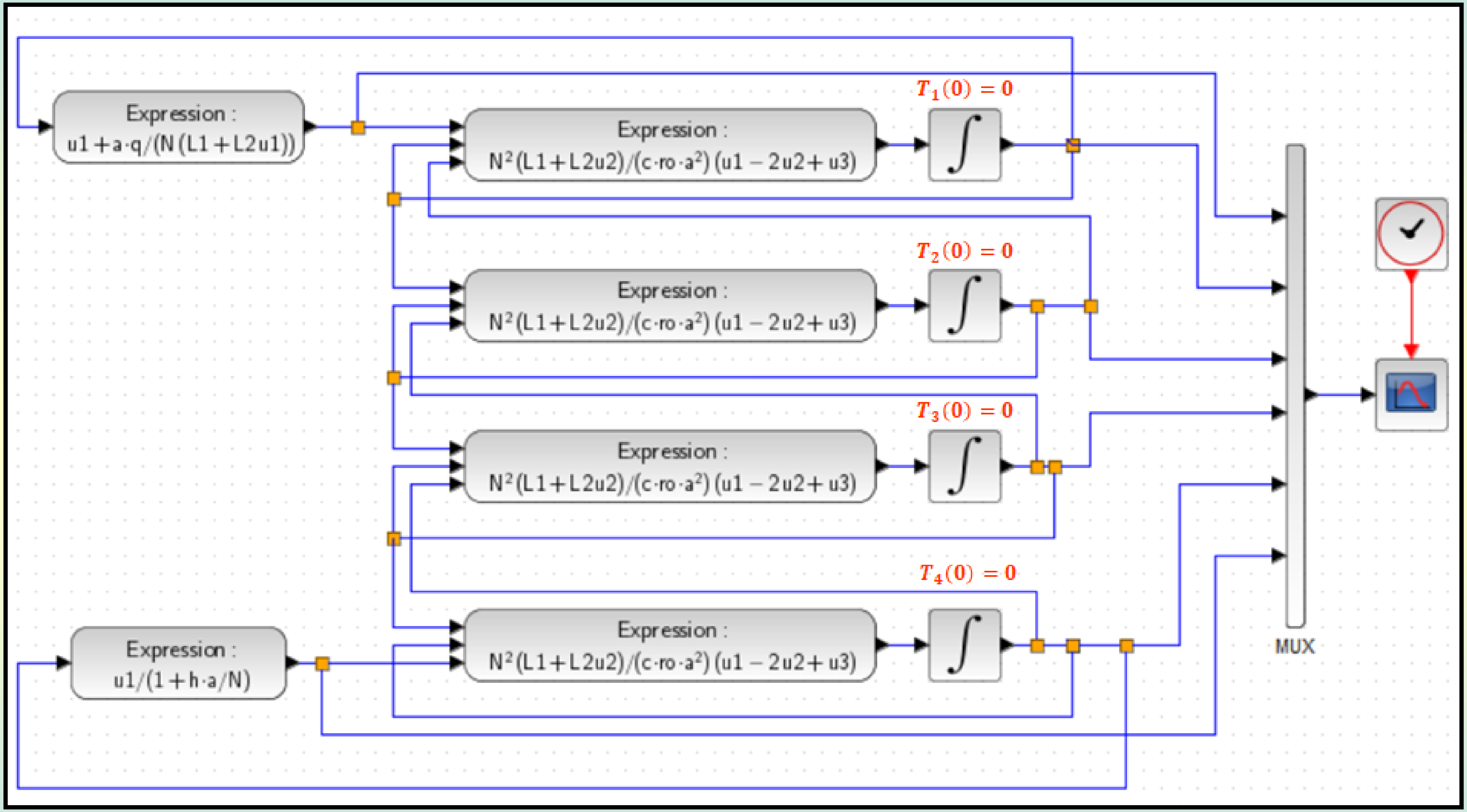
Uwzględniając warunki brzegowe w równaniach różniczkowo-różnicowych otrzymujemy końcowy układ równań różniczkowych uwzględniających warunki brzegowe:

$$T_0 = T_1 + a * q/(N * (\lambda_1 + \lambda_2 * T_1))$$
$$\frac{dT_1}{d\tau} = f(T_1) * (T_2 - 2 * T_1 + T_0)$$
…………………………………..
$$\frac{dT_i}{d\tau} = f(T_i) * (T_{i+1} - 2 * T_i + T_{i-1})$$
…………………………………..
$$\frac{dT_{N-1}}{d\tau} = f(T_{N-1}) * (T_N - 2 * T_{N-1} + T_{N-2})$$
$$T_N = T_{N-1}/(1 + h * a/N)$$

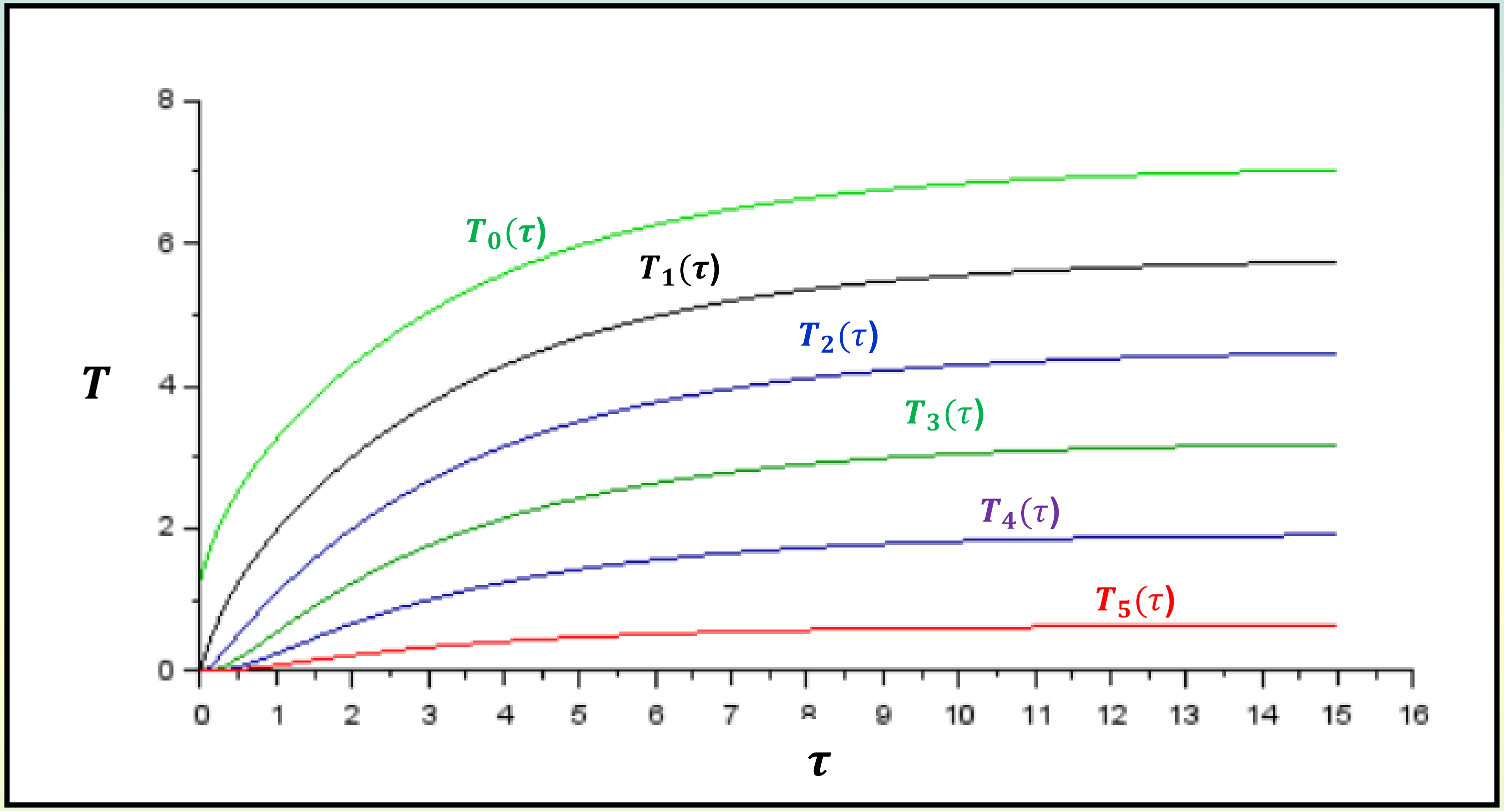
i warunkami początkowymi: $T_1(0) = T_2(0) = T_3(0) = \dots = T_{N-1}(0)$

Dane: $a = 1;\ N = 5;\ c = 0.1294;\ \rho = 19290;\ \lambda_1 = 311;\ \lambda_2 = 0$

$q = 2000;\ h = 10;\ \tau_{kon} = 15$



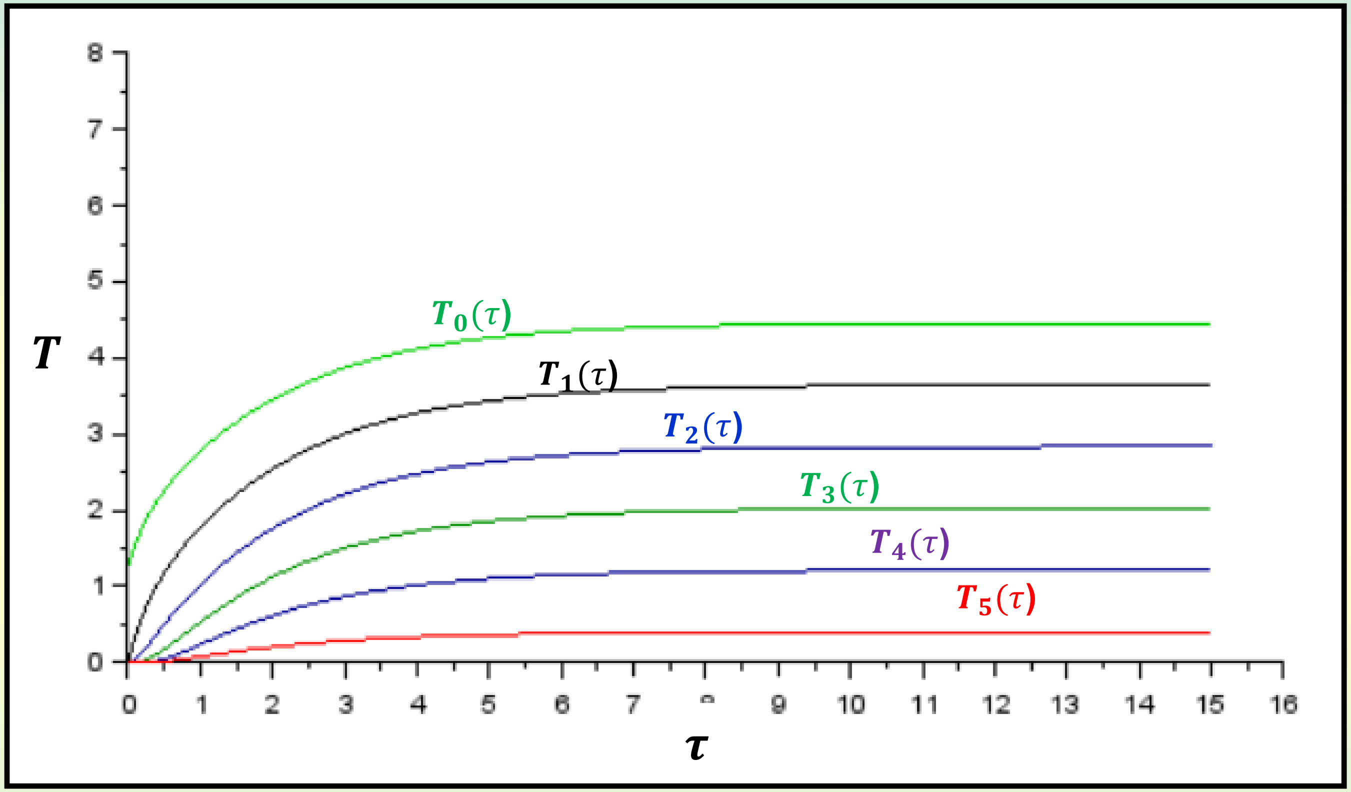
Expression :
u1+a·q/(N(L1+L2u1))
$T_1(0) = 0$
Expression :
N²(L1+L2u2)/(c·ro·a²)(u1 − 2u2+u3)
$T_2(0) = 0$
Expression :
N²(L1+L2u2)/(c·ro·a²)(u1 − 2u2+u3)
$T_3(0) = 0$
Expression :
N²(L1+L2u2)/(c·ro·a²)(u1 − 2u2+u3)
$T_4(0) = 0$
Expression :
u1/(1+h·a/N)
Expression :
N²(L1+L2u2)/(c·ro·a²)(u1 − 2u2+u3)
MUX



Rozkład temperatur $T(\tau)$ **w punktach** x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 **przekroju płyty:**

$$T_0(0) = 0,\ T_1(0) = 0,\ T_2(0) = 0,\ T_3(0) = 0,\ T_4(0) = 0,\ T_5(0) = 0$$

$\lambda_1 = 311;\ \lambda_2 = 0$ **płyta izotropowa**



Rozkład temperatur $T(\tau)$ **w punktach** x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 **przekroju płyty:**

$$T_0(0) = 0,\; T_1(0) = 0,\; T_2(0) = 0,\; T_3(0) = 0,\; T_4(0) = 0,\; T_5(0) = 0$$

$\lambda_1 = 311;\; \lambda_2 = 50$ **płyta anizotropowa** koniec

w. 3