

Metody Numeryczne w inżynierii

**Rozwiązywanie równań
różniczkowych zwyczajnych**

-

zagadnienie początkowe

Wprowadzenie

Równanie różniczkowe jest to równanie, które wyznacza zależność między nieznaną funkcją a jej pochodnymi.

Rozwiązanie równania różniczkowego polega na znalezieniu funkcji y , której pochodne spełniają to równanie.

Równania różniczkowe można podzielić na:

- równania różniczkowe zwyczajne — w których szukamy funkcji jednej zmiennej
- równania różniczkowe cząstkowe — w których szukamy funkcji wielu zmiennych

Aby rozwiązać równanie różniczkowe należy sprowadzić je do jednej ze standardowych form, a następnie użyć odpowiadającego tej formie przekształcenia.

W niniejszych rozważaniach ograniczymy się do rozwiązywania tzw. **zagadnień początkowych** dotyczących **równań różniczkowych zwyczajnych**

W ogólnej postaci zagadnienie to formułuje się w następujący sposób:

- dane jest równanie różniczkowe w postaci $dy/dx = f(y, x)$ lub $y' = f(x, y)$
- oraz warunek początkowy $y(x_0) = y_0$

Należy wyznaczyć funkcję $y = y(x)$ w zadanym przedziale $a \leq x \leq b$ gdzie $a = x_0$

Dla **niektórych funkcji $f(x, y)$** znane są metody pozwalające analitycznie wyznaczyć $y(x)$, czyli uzyskać rozwiązanie funkcji $y(x)$ w postaci wzoru, np.

$$y' = x^2 - x \rightarrow y(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$y' - y = x \sin(x) \rightarrow y(x) = -\frac{x \sin(x)}{2} - \frac{(x+1) \cos(x)}{2} + Ce^x$$

Dla większości równań różniczkowych trzeba jednak szukać rozwiązań przybliżonych, a więc uciekać się do **metod numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych**. Rozwiązanie numeryczne to obliczenie wartości funkcji $y(x_i)$ dla kolejnych wartości x_i przy znajomości y dla x_0 tzn. $y_0 = y(x_0)$.

Rozwiązanie analityczne problemu to wyznaczenie wzoru szukanej funkcji **$y = y(x)$** .

Wiele zagadnień naukowych i technicznych jest opisywanych układami równań, które zawierają:

- równania różniczkowe pierwszego rzędu,
- równania różniczkowe wyższego rzędu niż I-y,
- układy równań różniczkowych liniowych,
- układy równań różniczkowych nieliniowych.

Zazwyczaj zmienna niezależna **x** oznacza **czas** lub **współrzędną przestrzenną**, a równanie różniczkowe wyraża **prawo fizyczne** określające zmiany badanego obiektu. Mogą to być np. zmiany temperatury w czasie, ruch punktu materialnego w przestrzeni bądź w czasie itp.

Na ogół rozwiązujemy układ równań różniczkowych rzędu I-go lub równanie rzędu wyższego niż I-e.

Wiadomo, że **każde równanie różniczkowe n-tego rzędu można zapisać jako układ n równań różniczkowych I-go rzędu z n liczbą warunków początkowych**.

Przykłady równań różniczkowych:

- $\frac{dy}{dx} = 2$ **war. początkowy** $y(0) = 0$
- $\frac{dy}{dx} = 2 * x$ **war. początkowy** $y(0) = 0$
- $\frac{dy}{dx} = 3 * x^2 - 2 * y^2$ **war. początkowy** $y(0) = 1$
- $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x - 5y + y' - 2$ **war. początkowe** $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$

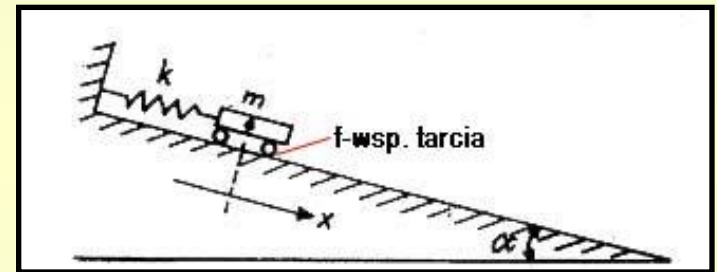
- **Równanie $x(t)$ opisujące ruch drgający masy m wokół punktu równowagi – rys. 1. Analiza zadania prowadzi do nieliniowego równania różniczkowego II rzędu postaci:**

$$m * \frac{d^2x}{dt^2} + k * x + g * f * m * \cos(\alpha) * \text{sign}\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

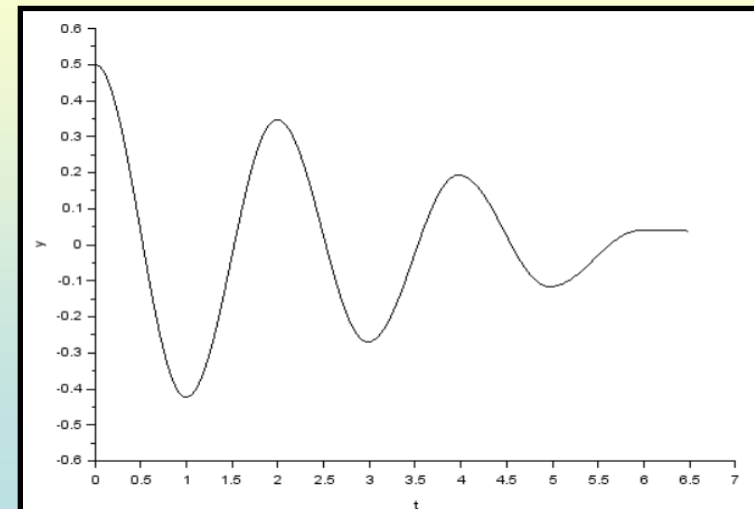
warunki początkowe: $x(0) = a, x'(0) = 0$

- **dany układ równań różniczkowych i war. początk.**

$$\begin{cases} y' = y(t) + 3z(t) \\ z' = y(t) - z(t) \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = 2 \\ z(0) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

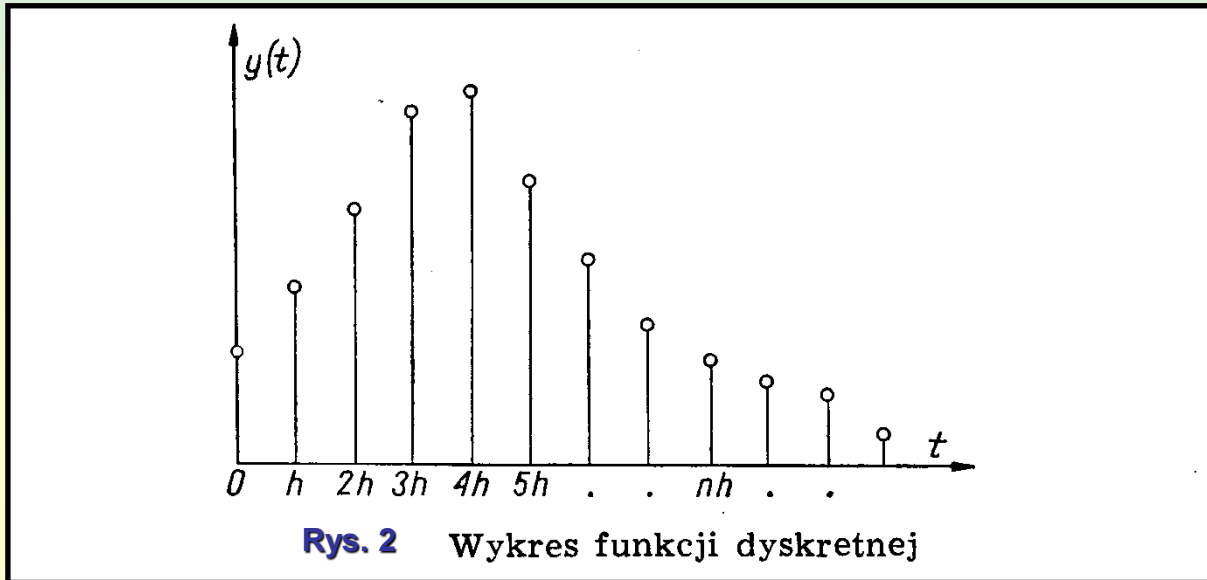


Rys. 1



Podstawy matematyczne rozwiązywania równań różniczkowych metodami numerycznymi

Komputery ze względu na zasadę swego działania obliczają wyłącznie wartości funkcji dyskretnej (rys. 2).

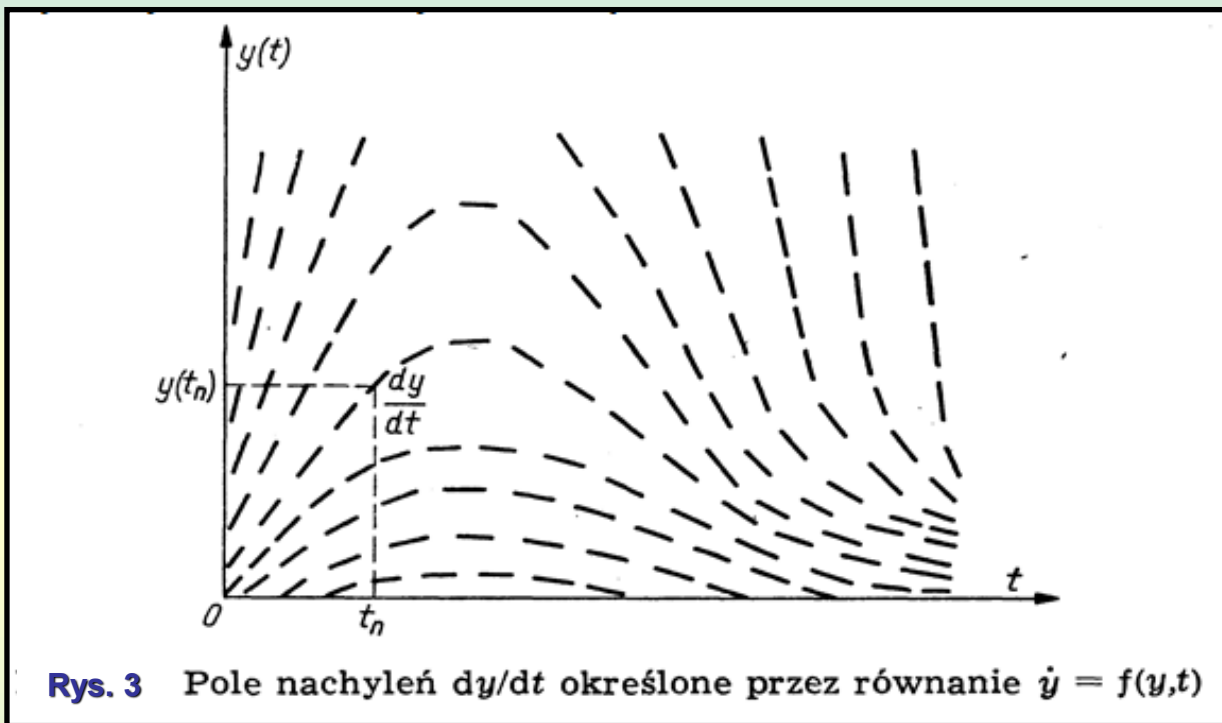


Wyrażenie (1.1) określa tzw. **różnicę funkcji dyskretnej**

$$\Delta y(t) = y(t + h) - y(t) \quad (1.1)$$

Różnicę funkcji dyskretnej dla chwili t oblicza się odejmując wartość funkcji dla chwili t od wartości funkcji wziętej dla chwili czasu o h większej (późniejszej). Parametr h jest dowolną liczbą dodatnią.

Graficzną interpretację wyrażenia (1.2) przedstawia rys. 3. Każdemu punktowi płaszczyzny (y,t) jest przyporządkowane nachylenie dy/dt . Przyjęcie określonych warunków granicznych umożliwia wybranie właściwego rozwiązania z rodziny wszystkich możliwych rozwiązań.



Zazwyczaj stosowane w modelowaniu cyfrowym techniki numerycznego całkowania wywodzą się z dwóch rodzin metod całkowania:

- metod predykcyjno-korekcyjnych; ; (predykcja to wykorzystanie danych z przeszłości do stworzenia modelu, który może przewidzieć przyszłe wydarzenie),
- metod Rungego-Kutty.

Rodzinę metod predykcyjno-korekcyjnych można scharakteryzować następująco:

- nie są samostartujące i wymagają wstępnej informacji,
- umożliwiają iteracyjne działanie „korektora” aż do uzyskania pożądanej zbieżności,
- umożliwiają dokładną ocenę *błędu obcinania* (błędu będącego wynikiem aproksymacji funkcji ciągłej przez funkcję dyskretną),
- wymagają zapamiętywania pewnej liczby obliczonych poprzednio wartości funkcji.

Rodzinę metod Rungego-Kutty można scharakteryzować następująco:

- są samostartujące i nie wymagają wstępnej informacji,
- wymagają obliczenia N pochodnych dla metody N -tego rzędu,
- błąd obcinania w każdym kroku jest proporcjonalny do h^{N+1} , przy czym h jest krokiem całkowania, a N - rzędem.
- Ze względu na właściwość samostartowania metody Rungego-Kutty są również używane do rozpoczęcia obliczeń prowadzonych z zastosowaniem metod predykcyjno-korekcyjnych.

Metody predykcyjno-korekcyjne

W celu lepszego wyjaśnienia techniki stosowanej w tej grupie metod, na wstępie zostanie omówiona najprostsza metoda Eulera, w której nie stosuje się korekcji.

Metoda Eulera zakłada, że nachylenie krzywej obliczone dla wartości $t=t_n$ nie zmienia się aż do wartości $t=t_{n+1}$, przy czym $h=t_{n+1} - t_n$ jest krokiem całkowania.

Jeżeli są znane wartości: $y_n = y(t_n)$

oraz $y'_n = y'(t_n)$

to $y_{n+1} = y_n + h * y'_n$ (1.3)

oraz $y'_{n+1} = f(y_{n+1}, t_{n+1})$ (1.4)

Obliczanie kolejnych wartości funkcji będącej rozwiązaniem równania (1.2) wymaga kolejnego, cyklicznego stosowania wyrażeń (1.3) i (1.4).

Błąd rozwiązania jest w tej metodzie proporcjonalny do h (dla małych wartości kroku całkowania).

Prezykcyjny metody wielopunktowe

Poprzednia metoda zakładała stałość nachylenia krzywej w przedziale (t_n, t_{n+1}) . Zazwyczaj nachylenie krzywej w tym przedziale zmienia się w sposób ciągły. Zmiany te można przewidzieć na podstawie znajomości kształtu krzywej w okresie poprzednim, tzn. na podstawie znajomości nachylenia krzywej w chwilach t_{n-1}, t_{n-2}, \dots itd., $(y'_{n-1}, y'_{n-2}, \dots$ itd.) oraz znajomości wartości funkcji opisującej krzywą $(y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$ itd).

Przyporządkowanie ciągłowi poprzednich wartości y_n i y'_n odpowiednich wielomianów ekstrapolacyjnych umożliwia przewidywanie (prezykcję) wartości y_{n+1} .

Opracowano wiele metod; niektóre z nich wykorzystują znajomość poprzednich wartości y i y' , inne tylko znajomość poprzednich wartości y' , różnią się ponadto liczbą analizowanych poprzednich punktów. Przykładem jest popularna **metoda Adamsa-Bashfortha czwartego rzędu**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3}) \quad (1.5)$$

Obliczenie nachylenia y'_{n+1} przebiega podobnie jak w metodzie poprzedniej wg wzoru (1.4).

$$y'_{n+1} = f(y_{n+1}, t_{n+1})$$

Prezykcyjno-korekcyjne metody wielopunktowe

W metodach prezykcyjno-korekcyjnych oblicza się wartości y i y' dla chwili t_{n+1} korzystając z techniki opisanej poprzednio. Obliczone wartości oznaczają się jako y_{n+1}^P oraz $y'_{n+1}{}^P$ i traktuje jako wstępne oszacowanie.

Drugi etap obliczeń jest podobny do obliczeń w metodzie poprzedniej z tym, że na podstawie kilku kolejnych wartości pochodnych funkcji ocenia się kształt krzywej. Różnica polega na tym, że do oceny korzysta się oprócz wartości pochodnych: $y'_n, y'_{n-1}, y'_{n-2}, \dots$ również z szacunkowej wartości $y'_{n+1}{}^P$.

Uwzględnienie $y'_{n+1}{}^P$ prowadzi do wzoru, w którym ważona suma pochodnych zawiera zarówno y'_n, y'_{n-1}, y'_{n-2} , jak i $y'_{n+1}{}^P$. Wzór ten umożliwia obliczenie skorygowanej wartości y_{n+1} .

Jedną z bardziej rozpowszechnionych metod tego typu jest **metoda Adamsa-Moultona czwartego rzędu**

$$y_{n+1}^P = y_n + \frac{h}{24} (55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3})$$

$$y'_{n+1}{}^P = f(y_{n+1}^P, t_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24} (9y'_{n+1}{}^P + 19y'_n - 5y'_{n-1} + y'_{n-2})$$

$$y'_{n+1} = f(y_{n+1}, t_{n+1})$$

Jest rzeczą oczywistą, że obliczoną w ten sposób wartość y'_{n+1} można ponownie użyć do obliczenia dokładniejszej wartości y_{n+1} i powtarzać iteracyjnie proces wielokrotnie. W praktyce nie stosuje się więcej niż jedną lub dwie iteracje.

Znacznie prostszą metodą jest *metoda Adamsa drugiego rzędu*

$$y_{n+1}^P = y_n + \frac{h}{2}(3y'_n - y'_{n-1})$$

$$y'_{n+1}{}^P = f(y_{n+1}^P, t_{n+1})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{10}(9y'_{n+1}{}^P + y'_n)$$

$$y'_{n+1} = f(y_{n+1}, t_{n+1})$$

Zmienna długość kroku. Algorytmy predykcyjno-korekcyjne umożliwiają, w przeciwieństwie do metod Rungego-Kutty, dobrą ocenę błędów obcinania, zwłaszcza gdy równania predykcyjne i korekcyjne są tego samego rzędu. Znajomość błędu obcinania umożliwia dobór odpowiedniej wartości (długości) kroku h w celu uzyskania wymaganej dokładności.

Wybór metody optymalnej

Za miarę dobroci metody całkowania numerycznego można przyjąć **koszt obliczeń**. Według zgodnej opinii wielu autorów nie istnieje metoda, która w każdych okolicznościach jest najlepsza.

Dla każdej metody można wskazać zagadnienie, do rozwiązania którego metoda ta jest nieodpowiednia. Dodatkową trudność sprawia zależność efektywności określonej metody od rodzaju komputera, na którym prowadzi się obliczenia.

Wyboru najlepszej metody całkowania numerycznego należy dokonywać zatem dla określonego zadania lub klasy zadań przy uwzględnieniu rodzaju komputera. Z tego względu wszystkie nowoczesne języki modelowania cyfrowego umożliwiają wybór odpowiedniej metody spośród kilku, jakimi dysponują.

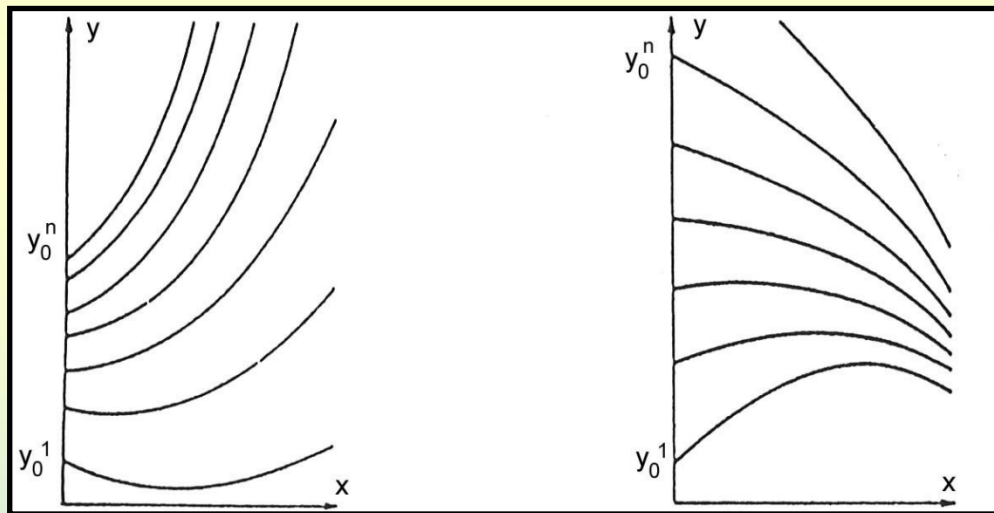
W popularnych językach obliczeniowych (np. symulacyjnych) dość powszechnie jest stosowana prosta i ulepszona metoda Eulera. Często stosuje się metody Rungego-Kutty czwartego oraz drugiego rzędu. W wielu językach występują również odmiany metody Adamsa, np. metoda Adamsa drugiego rzędu

Za rozwiązanie zagadnienia początkowego $y' = f(x,y)$ z warunkiem $y(x_0) = y_0$ można uważać pewną funkcję $y(x,y_0)$, gdzie $y_0 = y(x_0)$ jest warunkiem początkowym.

Jeżeli $y' = f(x, y)$ to $y(x) = F(x) + y_0$, gdzie $(F(x)+y_0)' = f(x, y)$

Tak więc dla różnych y_0 otrzymujemy różne rozwiązania. Możemy więc mówić o "rodzinie rozwiązań" w przestrzeni (x, y) gdzie y_0 jest wartością wyznaczającą konkretne rozwiązanie spośród "rodziny rozwiązań".

Rysunki 4 oraz 5 przedstawiają dwie rodziny rozwiązań dla pewnych równań różniczkowych.



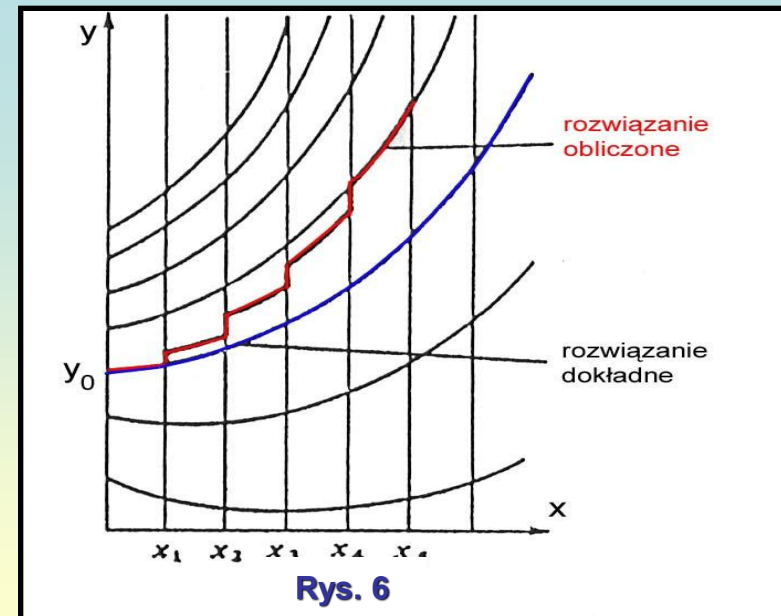
Rys. 4

Rys. 5

Zauważmy, że zaburzenie warunku początkowego, będące np. efektem zaokrąglenia wartości y_0 , oznacza, że $y(x)$ zmieni się na inną funkcję z rodziny rozwiązań.

Rysunek 6 ilustruje jak sumowanie się błędów obliczeń może spowodować zmianę rozwiązania dokładnego, na inne przybliżone.

Generalnie problemy błędów przy numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych są bardziej złożone. Dalej zasygnalizowany zostanie wpływ błędów obcinania i zaokrąglania na uzyskane rozwiązania oraz problem tzw. stabilności obliczeń.



Oprócz **zagadnień początkowych**, rozważa się dla równań różniczkowych także **zagadnienia brzegowe**, gdzie rozwiązania powinny spełniać pewne dodatkowe warunki w dwóch (lub więcej) punktach.

Wiele problemów nauki i techniki prowadzi do **równań różniczkowych cząstkowych**, których rozwiązaniami są funkcje wielu zmiennych (np. współrzędnych przestrzennych x, y, z oraz czasu t). Może to dotyczyć np. rozchodzenia się ciepła w nagrzewanym pręcie o zadanej długości lub ścianie o określonej grubości itp.

Te równania wiążą pochodne cząstkowe szukanych funkcji, a na te funkcje nakłada się jeszcze dodatkowe warunki początkowe lub brzegowe.

Metoda Eulera

Najprostszą metodą przybliżoną rozwiązania **zagadnienia początkowego** jest metoda **Eulera**.

Metoda ta (zwanej także metodą linii łamanych) nie jest zalecana do praktycznego stosowania (zbyt mała dokładność) ale dobrze ilustruje sposób postępowania przy rozwiązywaniu omawianych zagadnień.

Mamy dane równanie: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ i warunek początkowy: $y(x_0) = y_0$

Postępowanie:

- przedział $[a, b]$ dzielimy na podprzedziały o długości h (h – będziemy nazywać krokiem obliczeniowym) za pomocą punktów $x_i = a + i \cdot h$, gdzie $i = 0, 1, 2, \dots$
- przyjmujemy (zgodnie z war. pocz.), że $y(x_0) = y_0$,
- wyliczamy kolejne przybliżenia y_1, y_2, y_3, \dots
wartości dokładnych $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots$ szukanej funkcji $y(x)$
aproxymując pochodną w kolejnych punktach (x_i, y_i) za pomocą ilorazu różnicowego postaci: $(y_{i+1} - y_i) / h$.

Daje to równanie różnicowe postaci:
pozwalające na wyznaczanie kolejnych y_{i+1}

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

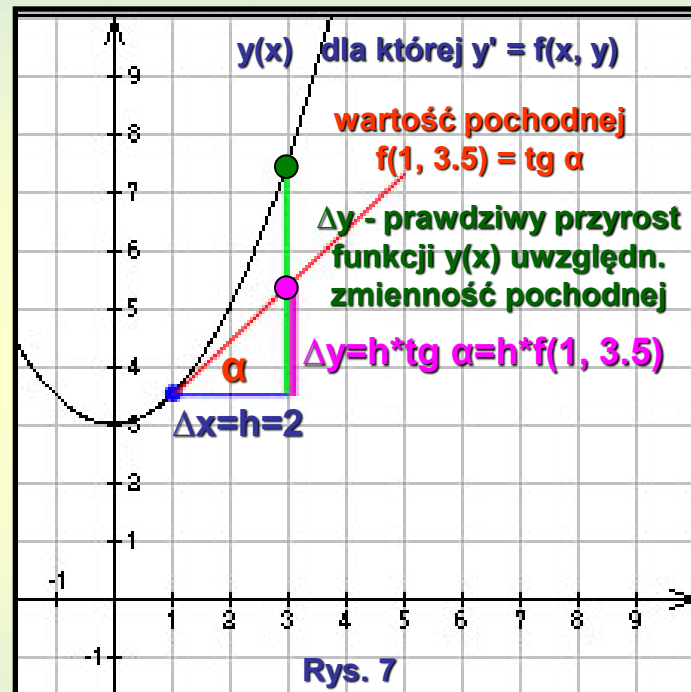
Ostatecznie otrzymujemy **wzór rekurencyjny** postaci:

$$\{y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)\} \quad (1.6) \quad \text{gdzie} \quad i=0, 1, 2, \dots \quad \text{oraz} \quad y_0 = y(x_0)$$

który pozwala dla kolejnych x_0, x_1, x_2, \dots wyznaczać kolejne przybliżone wartości: y_1, y_2, y_3, \dots szukanej funkcji $y(x)$ dla której mamy zależność w postaci: $y' = f(x, y)$.

Zauważmy, że we wzorze rekurencyjnym przestało być istotne na ile funkcja $f(x, y)$ jest funkcją "złożoną", liniową czy nieliniową. Obliczenia prowadzimy według prostego schematu opisanego równaniem (1.6).

Zauważmy także, że w metodzie tej założyliśmy stałość pochodnej w każdym kolejnym podprzedziale h , co najczęściej nie jest zgodne z rzeczywistością, ponieważ pochodna wyrażona funkcją $f(x, y)$ generalnie jest funkcją ciągłą, a my zakładamy, że ma ona charakter jakby "funkcji schodkowej", tzn. w każdym przedziale h pochodna rośnie albo maleje o pewną zmienną wartość.



Posługując się pochodną $f(x, y)$ funkcji $y(x)$ dla której mamy równanie różniczkowe postaci $y' = f(x, y)$ popełniamy w każdym kroku obliczeniowym niewielki błąd wyznaczając przyrost szukanej funkcji $y(x)$ na podstawie wartości pochodnej na początku każdego podprzedziału h podczas gdy ta pochodna zmienia swoją wartość w przedziale $h = \Delta x$

Przykład

Dla równania $y' = y$ i war. początkowego $y(0) = 1$ stosując metodę Eulera, utworzyć rozwiązanie przybliżone dla $h = 0.2$ oraz dla $h = 0.1$, a następnie porównać je z rozwiązaniem dokładnym (analitycznym), które jest postaci $y(x) = \exp(x)$

$$y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)$$

dla $h = 0.2$

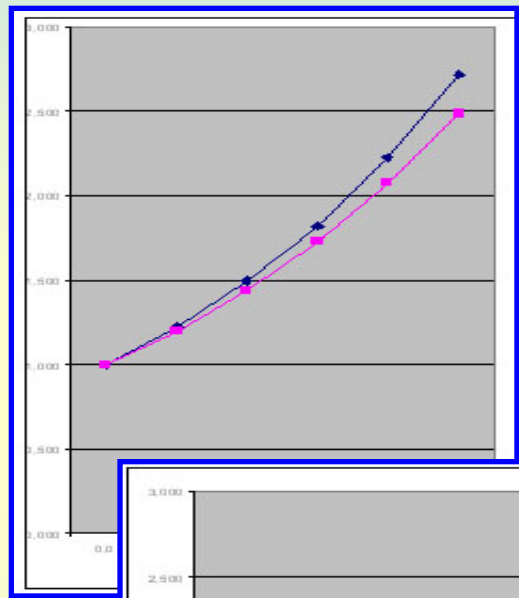
x_i	$y=\exp(x_i)$	y_i wylicz.	błąd
0,0	1,000	1,000	0,000
0,2	1,221	1,200	-0,021
0,4	1,492	1,440	-0,052
0,6	1,822	1,728	-0,094
0,8	2,226	2,074	-0,152
1,0	2,718	2,488	-0,230

dla $h = 0.1$

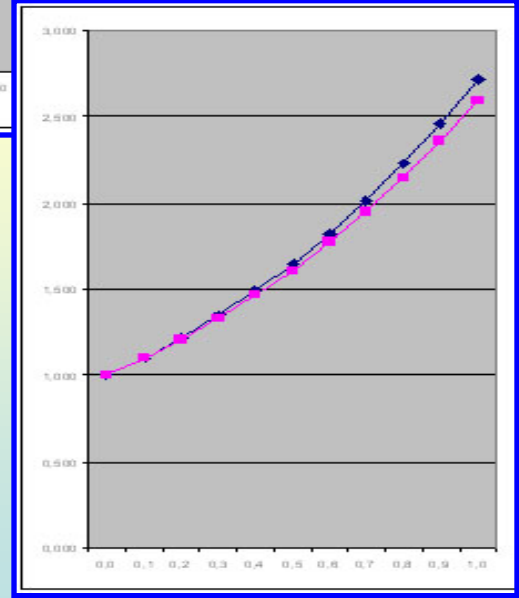
x_i	$y=\exp(x_i)$	y_i wylicz.	błąd
0,0	1,000	1,000	0,000
0,1	1,105	1,100	-0,005
0,2	1,221	1,210	-0,011
0,3	1,350	1,331	-0,019
0,4	1,492	1,464	-0,028
0,5	1,649	1,611	-0,038
0,6	1,822	1,772	-0,050
0,7	2,014	1,949	-0,065
0,8	2,226	2,144	-0,082
0,9	2,460	2,358	-0,102
1,0	2,718	2,594	-0,124

Nietrudno zauważyć, że **błąd obliczeń** jest proporcjonalny do h . A także, że błąd rośnie wraz ze wzrostem x .

Wadą metody Eulera jest to, że dla uzyskania dobrej dokładności trzeba wybierać małą długość kroku obliczeniowego h .



Rys. 8



Rys. 9

Przypomnijmy metodę Eulera: $y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)$

gdzie: $i=0, 1, 2, \dots$ oraz $y_0 = y(x_0)$

Zmodyfikowana (ulepszona) metoda Eulera - usuwa pewne błędy metody Eulera.

$$\begin{cases} k_1 = \frac{h}{2} * f(x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h * f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1) \end{cases}$$

$i=0, 1, 2, \dots$ oraz $y_0 = y(x_0)$

Algorytm obliczeń:

- w każdym kroku iteracyjnym dodatkowo liczymy k_1 - jest to przyrost wartości szukanej funkcji w odległości $h/2$ od x_i obliczony na podstawie wartości pochodnej $f(x_i, y_i)$; (robimy to dla poprawienia wartości pochodnej w przedziale $[x_i \leftrightarrow x_{i+1}]$).
- wyznaczamy kolejną wartość funkcji y_{i+1} wyliczając jej przyrost na odległości h (cały krok) poprawiając wartość pochodnej, tzn. wyznaczamy ją ze wzoru postaci $f(x_i+h/2, y_i+k_1)$.

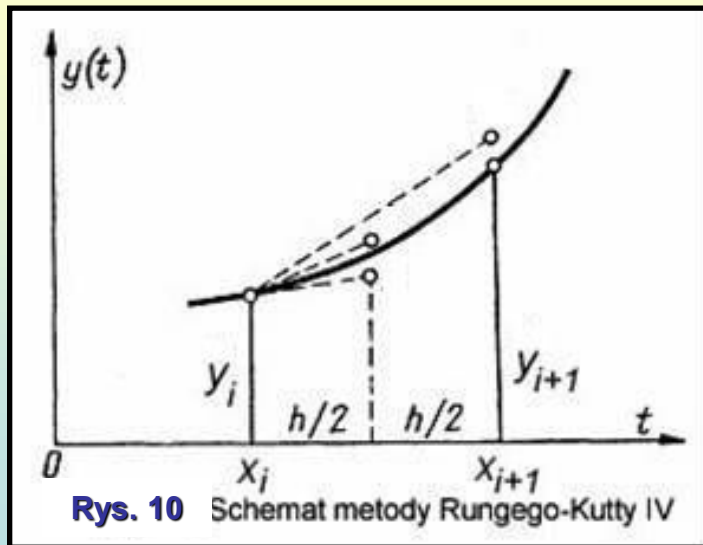
We wzorze (1) wartość pochodnej była liczona w oparciu o x_i oraz y_i na początku przedziału $[x_i \leftrightarrow x_{i+1}]$, natomiast w metodzie Eulera zmodyfikowanej jest ona wyliczana w połowie przedziału $[x_i \leftrightarrow x_{i+1}]$ czyli w oparciu o $x_i+h/2$ oraz y_i+k_1 .

Metody Rungego-Kutty

Pomysł zastosowany w metodach Rungego-Kutty polega na obliczeniu kilku wartości $f(x, y)$ w pewnych szczególnie dobranych punktach leżących w pobliżu krzywej $y(x)$ rozwiązania w przedziale $[x_i, x_i+h]$ i na utworzeniu takiej kombinacji tych wartości, która z dobrą dokładnością daje przyrost szukanej funkcji czyli $\Delta y = y_{i+1} - y_i$

Najprostszy wariant to
metoda RK II rzędu

$$\begin{cases} k_1 = h * f(x_i, y_i) \\ k_2 = h * f(x_i + h, y_i + k_1) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 0, 1, 2, 3, \dots \\ y_0 = y(x_0) \end{matrix}$$



Najbardziej znana i popularna to metoda Rungego-Kutty IV rzędu określona poniższymi wzorami jest szeroko stosowana w rozwiązywaniu zagadnień naukowo-technicznych.

$$\begin{cases} k_1 = h * f(x_i, y_i) \\ k_2 = h * f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = h * f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = h * f(x_i + h, y_i + k_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

$$i = 0, 1, 2, \dots \quad \text{oraz} \quad y_0 = y(x_0)$$

Stabilność rozwiązania

Stabilność obliczeń numerycznych jest związana z generacją błędów w miarę postępu obliczeń, tzn. z wpływem błędów popełnionych przy obliczaniu jednego kroku na wyniki obliczeń następnych kroków. **Stabilność rozwiązania zależy od długości kroku obliczeniowego h , algorytmu obliczeń oraz stałych czasowych modelu.** Obliczenia uważa się za stabilne, jeśli błąd wprowadzany na każdym kroku maleje w miarę liczenia kolejnych kroków. Jeśli natomiast błąd ten wzrasta, ale wolniej niż wartość funkcji będącej rozwiązaniem, to obliczenia uważa się za warunkowo stabilne.

W celu **zachowania stabilności obliczeń** długość kroku całkowania musi być **wystarczająco mała** ze względu na **najmniejszą stałą czasową występującą w modelu**.

Sterowanie długością kroku obliczeniowego - h

Utrzymywanie **stałej długości kroku obliczeniowego h nie jest ekonomiczne**.

Sterowanie automatyczne tą długością jest więc ważnym i ciekawym elementem programowania zagadnień początkowych. Oprócz obliczania $y(x_{i+1})$ oraz $f(x_i, y_i)$ trzeba w każdym i -tym kroku iteracyjnym wykonać trzy czynności:

- ✓ oszacować błąd lokalny,
- ✓ ustalić, czy można zaakceptować obliczoną wartość $y(x_{i+1})$, czy też należy cofnąć się do poprzedniego punktu i przyjąć krótszy krok obliczeniowy h ,
- ✓ wyznaczyć długość kroku obliczeniowego h , którego należy użyć w danym kroku iteracyjnym.

Układy równań 1-go rzędu

Rozpatrzmy układ dwóch równań różniczkowych 1-go rzędu:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f_1(t, y, z) & \text{oraz } y(t_0) = y_0 \\ \frac{dz}{dt} = f_2(t, y, z) & \text{oraz } z(t_0) = z_0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h * f_1(t_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + h * f_2(t_i, y_i, z_i) \end{cases} \\ i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad y(t_0) = y_0 \quad z(t_0) = z_0$$

np.:

$$\begin{cases} y' = y + 3z & y(0) = 2 \\ z' = y - z & z(0) = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

gdzie $y = y(t)$ oraz $z = z(t)$

Aby wyznaczyć numerycznie wartości funkcji $y(t)$ oraz $z(t)$ np. dla $t \in [0; 1.6]$, przyjmiemy kolejne wartości kroku obliczeniowego h i wykorzystamy wzory iteracyjne (m. Eulera).

A następnie porównamy wyniki, które są zaprezentowane na rysunkach od 12 do 15 dla kolejnych wartości kroku obliczeniowego h , tj. $h=0.1, 0.01, 0.001, 0.0001$ z rozwiązaniem dokładnym które jest postaci:

$$\begin{cases} y(t) = e^{-2t} + e^{2t} \\ z(t) = -e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{2t} \end{cases}$$

..w zadanym przedziale [0, Tkon] i dla wybranego kroku h

Podaj **krok h: 0.1**
 Podaj **Tkon: 1.6**

Czas t:	Rozw. analityczne:		Rozw. numeryczne:	
	y(t)	z(t)	y(t)	z(t)
0.000	2.000	-0.667	2.000	-0.667
0.100	2.040	-0.412	2.000	-0.400
0.200	2.162	-0.173	2.080	-0.160
0.300	2.371	0.059	2.240	0.064
0.400	2.675	0.293	2.483	0.282
0.500	3.086	0.538	2.816	0.502
0.600	3.621	0.806	3.248	0.733
0.700	4.302	1.105	3.793	0.985
0.800	5.155	1.449	4.468	1.266
0.900	6.215	1.851	5.294	1.586
1.000	7.524	2.328	6.299	1.957
1.100	9.136	2.898	7.516	2.391
1.200	11.114	3.584	8.985	2.903
1.300	13.538	4.414	10.754	3.511
1.400	16.505	5.421	12.883	4.236
1.500	20.135	6.645	15.442	5.100
1.600	24.573	8.137	18.517	6.135

Press any key to continue

Rys. 12

..w zadanym przedziale [0, Tkon] i dla wybranego kroku h

Podaj **krok h: 0.01**
 Podaj **Tkon: 1.6**

Czas t:	Rozw. analityczne:		Rozw. numeryczne:	
	y(t)	z(t)	y(t)	z(t)
0.000	2.000	-0.667	2.000	-0.667
0.100	2.040	-0.412	2.036	-0.411
0.200	2.162	-0.173	2.154	-0.172
0.300	2.371	0.059	2.357	0.058
0.400	2.675	0.293	2.654	0.290
0.500	3.086	0.538	3.056	0.533
0.600	3.621	0.806	3.579	0.796
0.700	4.302	1.105	4.243	1.090
0.800	5.155	1.449	5.074	1.426
0.900	6.215	1.851	6.105	1.819
1.000	7.524	2.328	7.377	2.282
1.100	9.136	2.898	8.940	2.835
1.200	11.114	3.584	10.854	3.500
1.300	13.538	4.414	13.195	4.302
1.400	16.505	5.421	16.056	5.273
1.500	20.135	6.645	19.548	6.452
1.600	24.573	8.137	23.809	7.884

Press any key to continue

Rys. 13

```

-----
Czas t:      Rozw. analityczne:      Rozw.numeryczne:
-----
              y(t)          z(t)          y(t)          z(t)
-----
...w zadanym przedziale [0, Tkon] i dla wybranego kroku h

Podaj krok h: 0.001
Podaj Tkon: 1.6

0.000      2.000      -0.667      2.000      -0.667
0.100      2.040      -0.412      2.040      -0.412
0.200      2.162      -0.173      2.161      -0.173
0.300      2.371      0.059       2.370      0.059
0.400      2.675      0.293       2.673      0.292
0.500      3.086      0.538       3.083      0.538
0.600      3.621      0.806       3.617      0.805
0.700      4.302      1.105       4.296      1.104
0.800      5.155      1.449       5.147      1.447
0.900      6.215      1.851       6.204      1.848
1.000      7.524      2.328       7.509      2.323
1.100      9.136      2.898       9.116      2.891
1.200     11.114      3.584     11.087      3.575
1.300     13.538      4.414     13.503      4.402
1.400     16.505      5.421     16.459      5.406
1.500     20.135      6.645     20.075      6.626
1.600     24.573      8.137     24.495      8.111

Press any key to continue

```

Rys. 14

```

-----
Czas t:      Rozw. analityczne:      Rozw.numeryczne:
-----
              y(t)          z(t)          y(t)          z(t)
-----
...w zadanym przedziale [0, Tkon] i dla wybranego kroku h

Podaj krok h: 0.0001
Podaj Tkon: 1.6

0.000      2.000      -0.667      2.000      -0.667
0.100      2.040      -0.412      2.040      -0.412
0.200      2.162      -0.173      2.162      -0.173
0.300      2.371      0.059       2.371      0.059
0.400      2.675      0.293       2.675      0.292
0.500      3.086      0.538       3.086      0.538
0.600      3.621      0.806       3.621      0.805
0.700      4.302      1.105       4.301      1.105
0.800      5.155      1.449       5.154      1.449
0.900      6.215      1.851       6.214      1.851
1.000      7.524      2.328       7.523      2.327
1.100      9.136      2.898       9.134      2.897
1.200     11.114      3.584     11.111      3.583
1.300     13.538      4.414     13.534      4.412
1.400     16.505      5.421     16.501      5.419
1.500     20.135      6.645     20.129      6.643
1.600     24.573      8.137     24.565      8.134

Press any key to continue_

```

Rys. 15

Równania rzędu wyższego niż I-y

Rozpatrzmy równanie różniczkowe II-go rzędu:

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)} \quad \text{warunki początkowe:} \quad \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Równanie to **sprowadzamy do układu dwóch równań I-go rzędu, dla nowych zmiennych pomocniczych np. y_1 i y_2 , postaci:**

$$\boxed{\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = \frac{dy}{dx} \end{cases}} \quad \text{oraz warunki początkowe:} \quad \begin{cases} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \end{cases}$$

Różniczkując obie strony układu otrzymujemy:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y') = f(x, y_1, y_2) \end{cases}} \quad \boxed{\begin{cases} y_1(x_0) = y(x_0) = y_0 \\ y_2(x_0) = y'(x_0) = y'_0 \end{cases}}$$

oraz warunki początkowe dla nowych zmiennych:

Powyższy układ rozwiązujemy analogicznie jak w pkt. poprzednim.

Przykład:

Niech

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 3x - 5y + y' - 2 \quad \text{ i } \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

to, wprowadzając zmienne pomocnicze, postaci:

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy_1}{dx} = \frac{dy}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = 3x - 5y + y' - 2 = 3x - 5y_1 + y_2 - 2 \end{cases}$$

i różniczkując stronami otrzymujemy

oraz warunki początkowe:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y(0) = y_0 = 0 \\ y_2(x_0) = y'(0) = y'_0 = 1 \end{cases}$$

Ostatecznie otrzymujemy dla nowych zmiennych układ dwóch równań rzędu I-go z warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} = 3x - 5y_1 + y_2 - 2 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

koniec

w. 1